Chapitre 2

Nombres complexes

Table des matières

1 Ensemble $\mathbb{C}$, forme algébrique, conjugué.

1.1 Ensemble $\mathbb{C}$

Proposition 1. (Ensemble des nombres complexes) (admis)
On admet l'existence d'un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$ tel que :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$,
- $\mathbb{C}$ est muni des mêmes opérations $+,\ -,\ \times,\ \div,$ et les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$,
- Il existe un élément $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.

1.2 Forme algébrique d'un nombre complexe

Proposition 2. (Forme algébrique d'un nombre complexe) (admis)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe un unique couple (a, b) de réels tel que $z = a + ib$. L'écriture $a + ib$ est appelée **forme algébrique de** z. a et b sont appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de z.
On note :

- $a = \operatorname{Re}(z)$
- $b = \operatorname{Im}(z)$

Un réel est donc un complexe dont la partie imaginaire est nulle.
Un complexe dont la partie réelle est nulle s'appelle un ....
L'ensemble des .... se note $i\mathbb{C}$.

Exemple 1. Donner 4 imaginaires purs

Exercice de cours 1.
Donner la forme algébrique de $(3-7i)(2+8i)$, $\dfrac{1}{i}$, $(1+i)^2$, $(1+2i)^3$, i^{12} et $(1+i\sqrt{3})^9$

Exercice de cours 2. Attention aux pièges !
On pose $a = 3 - 4i$ et $b = 3 - 5i$. Donner la forme algébrique de $a + ib$.

Proposition 3. (Partie réelle/imaginaire d'une somme/différence et produit par un réel) (admis)
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$\operatorname{Re}(z+z') =$ .... ; $\operatorname{Re}(z-z') =$ .... ; $\operatorname{Re}(\lambda z) =$ ....

$\operatorname{Im}(z+z') =$ .... ; $\operatorname{Im}(z-z') =$ .... ; $\operatorname{Im}(\lambda z) =$ ....

Attention ! On n'a pas $\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')$! Idem pour un quotient !

Remarque. On peut généraliser à une somme de n complexes :

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce qui, avec le symbole Σ s'écrit :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cette égalité peut s'avérer très utile en pratique ! Voir par exemple l'exercice 9.

1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1. (Conjugué d'un nombre complexe)
Soit $z = a + ib$ avec a et b réels. On appelle **conjugué de** z le complexe noté .... défini par :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition 4. (Calculs avec le conjugué) (admis)
Soient z et z' deux complexes. On a :

1. $z + \overline{z} =$ .... et donc : $\mathrm{Re}(z) =$ ....
2. $z - \overline{z} =$ .... et donc : $\mathrm{Im}(z) =$ ....
3. $z \in \mathbb{R}$..........................
4. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow$ ....
5. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{z + z'} =$ ....
6. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{z - z'} =$ ....
7. $\overline{zz'} =$ ....
8. si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$ ....
9. si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} =$ ....
10. $\overline{\overline{z}} =$ ....
11. $z\overline{z} =$ ....

Remarque. Les points 1,2 et 10 ci-dessus ont pour conséquence que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$:

- $z + \overline{z}$ et un réel.
- $z - \overline{z}$ et un imaginaire pur.
- $z\overline{z}$ et un réel positif.

Remarque. Les points 1,2 ont aussi pour conséquence que, pour tout complexe z :

- $z \in \mathbb{R} \iff$ ....
- $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff$ ....

Exercice de cours 3. Donner la forme algébrique de $\dfrac{3-5i}{2+3i}$, $\dfrac{1+i}{3i-2}$, $\dfrac{1+i}{1-i}$, $\dfrac{1}{3i}$

Exercice de cours 4. Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. Donner la forme algébrique de $\dfrac{2z-5i}{z+3i}$

.

Exercice de cours 5. Soit $z = x + iy$ avec x et y réels. Donner la forme algébrique de $\dfrac{2z-5i}{z+3i}$

.

Proposition 5. (Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels) (preuve faite en cours)

....

....

....

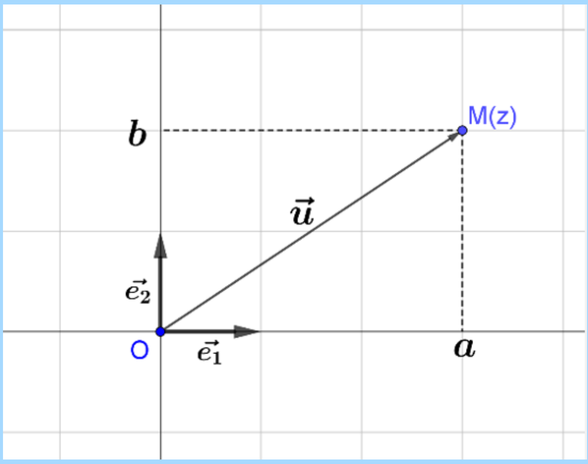
Exercice de cours 6. On pose $\alpha = 1 + i$. Vérifier que α est racine du polynôme P défini par $P(X) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$. En déduire une autre racine.

2 Plan complexe, module et argument

2.1 Plan complexe

Définition 2. (Plan complexe)
On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit $z = a + ib$ avec a et b réels. On note M le point de coordonnées (a, b) et on pose $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

- M est appelé .... de z.
- z est appelé .... de M.
- $\vec{u}$ est appelé .... de z.
- z est appelé .... de $\vec{u}$.



2.2 Module et argument d'un complexe - Forme exponentielle d'un complexe.

2.2.1 Module d'un complexe.

Définition 3. (Module d'un complexe)
Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle **module de** z le nombre réel positif noté .... défini par :

$$|z| = \text{...}$$

Remarque. Si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de z est la valeur absolue de z.

Proposition 6. (Interprétation géométrique du module) (admis)
Soit $z \in \mathbb{C}$. On note M le point image de z dans le plan complexe $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On a alors :

$$|z| = \text{..}$$

Proposition 7. (Interprétation géométrique du module d'une différence) (admis)
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On note M_1 et M_2 leur point image respectifs dans le plan complexe $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On a alors :

$$|z_1 - z_2| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition 8. (Carré du module) (admis)
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$|z|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition 9. (Module et opérations) (admis)
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a :

1. $|zz'| = \ldots\ldots\ldots$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \ldots\ldots\ldots$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \ldots\ldots\ldots$; $|z^n| = \ldots\ldots\ldots\ldots$.
2. **Inégalité triangulaire :** $|z + z'|\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
3. Optionnel : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leq |z - z'| \leq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$. (à ne retenir que si avancé).

L'interprétation géométrique du module mène très simplement aux résultats suivants :

Proposition 10. (Quelques autres propriétés du module) (admis)
Soient $z \in \mathbb{C}$. On a :

1. **Module de z et de sa partie réelle :** $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
2. **Module de z et de sa partie imaginaire :** $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
3. **Module de z, $\overline{z}$ et $-z$:** $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
4. **Caractérisation d'un complexe nul par son module** $z = 0 \iff \ldots\ldots\ldots$.

2.2.2 Argument d'un complexe non nul.

Définition 4. (Argument d'un complexe non nul.)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ (z est donc un complexe non nul). On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que :

On note alors $\theta = Arg(z)$.

Remarque. Il faut bien avoir en tête l'interprétation géométrique d'un argument. On peut alors facilement en déduire qu'un réel est un complexe dont l'argument vaut $\ldots\ldots\ldots$ ou $\ldots\ldots\ldots$ (à $2k\pi$ près).

Exercice de cours 7.
Déterminer un argument des complexes suivants, en évitant si possible des calculs inutiles.

$$z_1 = \sqrt{3} + 3i \quad ; \quad z_2 = 1 + i \quad ; \quad z_3 = -i \quad ; \quad z_4 = -5 \quad ; \quad z_5 = 2$$

3 Forme exponentielle d'un complexe.

3.1 Forme trigonométrique et forme exponentielle d'un complexe non nul.

Proposition 11. (Forme trigonométrique d'un complexe non nul.) (preuve faite en cours)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ (z est donc un complexe non nul). On pose $\rho = |z|$ et $\theta = Arg(z)$. On a alors :

$$z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cette écriture est appelée "forme trigonométrique de z".

Définition 5. ($e^{i\theta}$)
Pour tout réel θ, on pose :

$$e^{i\theta} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque. Avec cette notation, on étend donc la fonction exponentielle aux nombres complexes.

Avant même d'introduire la forme exponentielle d'un complexe, on en profite pour donner les importantes formules d'Euler :

Proposition 12. (Formules d'Euler) (preuve faite en cours)

....

Ces formules peuvent permettre de traiter des exercices comme celui ci-dessous, mais nous verrons qu'on peut aussi s'en passer.

Exercice de cours 8. Exprimer de $\cos^3(x)$ en fonction de $\cos(3x)$ et de $\cos x$. En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\, \mathrm{d}x$.

En fait une réelle application des formules d'Euler se trouve dans l'exercice plus difficile suivant :

Exercice de cours 9. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

Proposition 13. (Forme exponentielle d'un complexe non nul.) (preuve faite en cours)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ (z est donc un complexe non nul). On pose $\rho = |z|$ et $\theta = Arg(z)$. On a alors :

$$z = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Cette écriture est appelée "forme exponentielle de z".

On retiendra les cas particuliers suivants :

$$i = \dots\dots\dots\dots \quad ; \quad -1 = \dots\dots\dots\dots$$

Exercice de cours 10. Déterminer la forme exponentielle des complexes suivants. Pour l'argument on essaiera d'éviter les calcules inutiles...

$$z_1 = -1+i\sqrt{3} \quad ; \quad z_2 = 3-3i \quad ; \quad z_3 = \frac{1+i}{1-i} \quad ; \quad z_4 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad ; \quad z_5 = \frac{-2}{1+i} \quad ; \quad z_6 = (-1+i)^5$$

3.2 Calculs avec $e^{i\theta}$.

Proposition 14. (Conjugué de $e^{i\theta}$) (admis)

$$\overline{e^{i\theta}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Proposition 15. (Module de $e^{i\theta}$) (admis)

$$\left|e^{i\theta}\right| = \dots\dots\dots$$

Proposition 16. (Produit, puissances et quotient de $e^{i\theta}$) (admis)

1. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
2. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left(e^{i\theta}\right)^n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
3. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Attention : le point 2 ci-dessus n'est valable que si n est entier. Mais en pratique ce sera toujours le cas.

Proposition 17. (Formule de Moivre) (admis)

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$