Feuille d'exercices n° 2 - Complexes

Exercice 1. Forme algébrique (☆)
Mettre les complexes ci-dessous sous forme algébrique.

$$z_1 = (5-4i)(2+4i) \quad ; \quad z_2 = \frac{2+5i}{3-6i} \quad ; \quad z_3 = \frac{2+7i}{2i-1} \quad z_4 = \frac{(1+2i)(3-4i)}{(5i-6)(7+8i)}$$

Exercice 2. Forme algébrique - 2 (★)
Mettre les complexes ci-dessous sous forme algébrique.

$$z_1 = \frac{1}{i} \quad ; \quad z_2 = \frac{i^4+2i^3+5i^2+2i+6}{3i} \quad ; \quad z_3 = (1+i)^3 \quad ; \quad z_4 = i^{2020} \quad ; \quad z_5 = 1+i+i^2+\cdots+i^{2020}.$$

Exercice 3. Conjugué (★)
On considère trois complexes z_1, z_2 et z_3. On pose :

$$Z = 3z_1 + iz_2 - \frac{1-3i}{2i+4-z_3}.$$

Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$, $\overline{z_3}$.

Exercice 4. Conjugué - 2 (★)
Déterminer, sans utiliser le symbole " $\overline{}$ ", le conjugué du complexe z ci-dessous, où λ_1 et λ_2 sont des réels.

$$z = \lambda_1 i + \frac{3-5i}{2i+\lambda_2} - (2+5i)^{2020}.$$

Exercice 5. Forme exponentielle (★)
Déterminer une forme exponentielle des complexes ci-dessous :

$$z_1 = 3 \quad ; \quad z_2 = -4i \quad ; \quad z_3 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad z_4 = 1-i \quad ; \quad z_5 = \frac{z_3}{z_4}.$$

Exercice 6. (★) (*Voir l'indication ici*)
On pose $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$. Dire en justifiant si chacune des affirmation ci-dessous est vraie

1. $\overline{\left(\dfrac{1}{z^{12}}\right)} = \dfrac{1}{64}$.
2. $z^{30} = 2^{15}$
3. $(iz)^{15} \in \mathbb{R}$
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad z^{12k} \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Formules sommatoires (*Voir l'indication ici*)
Calculer les sommes suivantes :

1. (★★) $S_n = \sin(\theta) + \sin(2\theta) + \cdots + \sin(n\theta)$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$
2. (★★★) $T_n = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{4}\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \cdots + \dfrac{1}{2^n}\cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8. Linéariser (★★) (*Voir l'indication ici*)
Exprimer $\cos^4 x$ en fonction de $\cos(2x)$, $\cos(4x)$.

Exercice 9. Linéariser - 2
Linéariser :

1. (★★) $\sin^3 x$
2. (★★★) $\cos^2 x \sin^3 x$
3. (★★★) $\cos^5 x$

.

Exercice 10. Dans l'autre sens - 2 (*Voir l'indication ici*)

1. (★★) Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.
2. (★★) Exprimer $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. Vous mettrez $\sin x$ en facteur à la fin..

.

Exercice 11. (★★)

1. Rappeler la formule de duplication $\cos(2x) = \ldots$
2. En déduire une formule exprimant, pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ en fonction de $\cos\theta$.
3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$
4. Déterminer de même $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 12. (★)
Déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en remarquant que $\frac{1}{12} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$.

Exercice 13. (★★)

1. Rappeler les formules de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$. En déduire une formule donnant $\cos a \cos b$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$
2. Application : exprimer $\cos(2x)\cos(x)$ en fonction de $\cos(3x)$ et de $\cos(x)$.

Indications

Exercice 6 - Indication. (*retour à l'exercice 6*)
Mettre z sous forme exponentielle en mettant $1+i\sqrt{3}$ et $1+i$ sous forme exponentielle. Ensuite, faire les calculs qui deviennent assez simples.

Exercice 7 - Indication. (*retour à l'exercice 7*)

1.

$$\begin{aligned}\sin(\theta)+\sin(2\theta)+\cdots+\sin(n\theta) &= \operatorname{Im}(e^{i\theta})+\operatorname{Im}(e^{2i\theta})+\cdots+\operatorname{Im}(e^{ni\theta})\\ &= \operatorname{Im}\left(e^{i\theta}+e^{2i\theta}+\cdots+e^{ni\theta}\right)\end{aligned}$$

Or $e^{i\theta}+e^{2i\theta}+\cdots+e^{ni\theta}=e^{i\theta}+\left(e^{i\theta}\right)^2+\cdots+\left(e^{i\theta}\right)^n$

Il reste à calculer $e^{i\theta}+\left(e^{i\theta}\right)^2+\cdots+\left(e^{i\theta}\right)^n$ (c'est $q+q^2+\cdots+q^n$) et à en extraire la partie imaginaire.

2.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cdots+\frac{1}{2^n}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2}\operatorname{Re}(e^{i\frac{\pi}{3}})+\frac{1}{2^2}\operatorname{Re}(e^{i\frac{2\pi}{3}})+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{Re}(e^{i\frac{n\pi}{3}})\\ &= \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2^2}e^{i\frac{2\pi}{3}}+\cdots+\frac{1}{2^n}e^{i\frac{n\pi}{3}}\Big)\end{aligned}$$

Il reste à calculer $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2^2}e^{i\frac{2\pi}{3}}+\cdots+\frac{1}{2^n}e^{i\frac{n\pi}{3}}$ (c'est encore un $q+q^2+\cdots+q^n$) et à en extraire la partie réellle.

Exercice 8 - Indication. (*retour à l'exercice 8*)
Utiliser la méthode de l'exercice 8 du cours avec la formule d'Euler :

$$\cos^4(x)=(\cos x)^4=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$$

Puis développer et regrouper les $e^{i\theta}$ deux par deux pour "former des cosinus" toujours avec la formule d'Euler.

Exercice 10 - Indication. (*retour à l'exercice 10*)
On commence comme dans la méthode des formules sommatoires (exercice 7), en remarquant que $\cos\theta$ est la partie réelle de $e^{i\theta}$ ou (pour la deuxième question) que $\sin\theta$ est la partie imaginaire de $e^{i\theta}$.

1. $$\cos(3x) = \mathrm{Re}\left(e^{i\times 3x}\right)$$
   Or $$e^{i\times 3x} = \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos x + i\sin x)^3$$
   Il reste à développer $(\cos x + i\sin x)^3$ et à en extraire la partie réelle.

2. $$\sin(4x) = \mathrm{Im}\left(e^{i\times 4x}\right)$$
   Or $$e^{i\times 4x} = \left(e^{ix}\right)^4 = (\cos x + i\sin x)^4$$
   Il reste à développer $(\cos x + i\sin x)^4$ et à en extraire la partie imaginaire.