Programme de colle n° 2
Semaine du 28/09/2019

Table des matières

Vous serez interrogé sur une ou deux des questions de cours listées ci-dessous. Puis sur un exercice préparé et enfin un ou plusieurs exercices non préparés. La question de cours doit être parfaitement sue. L'exercice préparé doit être traité correctement également.

1 Exercices préparés et démonstrations

Exercice préparé 1

Énoncer et démontrer la propriété des racines d'un polynôme à coefficients réels.

Exercice préparé 2

Linéariser $\cos^4 x$. (c'est l'exercice 8 de la feuille d'exercices n° 2).

Exercice préparé 3

Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

Pour les avancés (plus de 10 au dernier DST) :

Exercice préparé 4

Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

2 Compétences attendues.

Généralités sur les fonctions

- Savoir déterminer un domaine de définition. Notamment savoir refaire l'exemple 2 du chap. 1 et les questions 2, 3 et 4 de l'exercice 1 de la feuilles d'exercices n° 1.

- Savoir déterminer simplement la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle (exemples 8 et 9 du chap. 1).

- Savoir calculer une dérivée en utilisant les formules de dérivées. Savoir notamment retrouver les dérivées l'exercice 5 de la feuilles d'exercices n° 1 (sans forcément savoir justifier le domaine de dérivation).

- Savoir effectuer un changement de variables pour calculer une limite. Savoir refaire tous les exemples donnés en cours :
  1. $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x)$.
  2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 - \ln(x^3) + 1$
  3. $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$.

- Savoir utiliser $a^b = e^{b\ln a}$ (si $a > 0$) pour :
  - Savoir Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
  - Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^x$ (Ecricome 1996).
    1. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
    2. Justifier que f est dérivable et la dériver pour étudier ses variations.

- Savoir utiliser les croissances comparées pour calculer des limites. Savoir notamment refaire les exemples du cours.

Complexes

1. Savoir mettre un complexe sous forme algébrique, savoir notamment appliquer la méthode du conjugué.

2. Savoir déterminer le module et l'argument d'un complexe. Savoir éviter de faire des calculs quand c'est possible. Savoir mettre sous forme exponentielle et diviser deux formes exponentielles.

3. Savoir linéariser une expression du genre $\cos^3 x$ ou $\cos^4 x$ en utilisant les formules d'Euler.

4. Savoir manipuler le conjugué dans un calcul.

3 Questions de cours

Généralités sur les fonctions

1.1. (a) Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de $x \mapsto \sqrt{x}$.

(b) Compléter la troisième colonne des tableaux ci-dessous :

N°	$f(x)$	$f'(x)$
1	x^n $n \in \mathbb{Z}^*$	
2	$\frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{Z}^*$	
3	e^x	
4	$\ln x$	
5	$\cos x$	
6	$\sin x$	

N°	$f(x)$	$f'(x)$
1	x^3	
1	x^3	
2	x^{-3}	
3	$\sqrt{x}$	
4	$x^{\frac{3}{2}}$	
5	$x^{-\frac{3}{2}}$	
6	$\frac{1}{x^3}$	
7	$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$	

1.2. Compléter la quatrième colonne des tableaux ci-dessous :

N°	Opération	*Fonction*	Dérivée
1	Somme	$u+v$	
2	Produit par une constante	ku	
3	Produit	uv	
4	Puissance $(n \in Z^*)$	u^n	
5	Inverse d'une puissance entière $(n \in Z^*)$	$\frac{1}{u^n}$	
6	Inverse	$\frac{1}{u}$	
7	Quotient	$\frac{u}{v}$	

N°	Opération	*Fonction*	Dérivée
8	Racine carrée	$\sqrt{u}$	
9	Exponentielle	e^u	
10	Logarithme	$\ln u$	
11	Sinus	$\cos u$	
12	Cosinus	$\sin u$	
13	Composée	$f(u)$	

Fonctions paires et impaires et fonctions T-périodiques

1.3. (a) Donner la définition d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Une fonction peut-elle être ni paire ni impaire ? Peut-elle être paire et impaire ?
Donner la propriété de symétrie des courbes des fonctions paires et impaires

(b) Donner la définition d'une fonction T-périodique.

Limites usuelles - limites de suites

1.4. (a) Donner la limite quand $n \to +\infty$ de (n^α) dans le cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$.

(b) Donner la limite quand $n \to +\infty$ de (q^n) dans selon les valeurs de q.

(c) Énoncer toutes les limites de croissances comparées des suites.

Croissances comparées de fonctions

1.5. Énoncer toutes les limites de croissance comparée des fonctions vues dans le cours.

Limites de taux d'accroissement

1.6. Énoncer toutes les limites de taux d'accroissement.

Fonction tangente

1.7. (a) Donner la définition de la fonction $\tan$.
   (b) Donner le domaine de définition de la foncion $\tan$.
   (c) Donner les propriété de parité et de périodicité de la fonction $\tan$. Et expliquer ces propriétés.
   (d) Donner et démontrer les deux formules de dérivées de la fonction $\tan$.

Complexes

Forme algébrique - partie réelle - partie imaginaire

On n'attends pas que vous donniez la définition de ces trois choses, mais que vous sachiez facilement donner la forme algébrique de nombres simples (comme dans l'exercice de cours 1 du chap. 2). Il faut savoir aussi donner la partie réelle ou la partie imaginaire d'un nombre donné.

2.1. (a) Donner 4 ou 5 imaginaires purs et placez-les dans le plan complexe.
   (b) Donner la forme algébrique de $(3-7i)(2+8i)$, $\frac{1}{i}$, $(1+i)^2$, $(1+2i)^3$, i^{12}
   (c) On pose $a = 3-4i$ et $b = 3-5i$. Donner la forme algébrique de $a+ib$.

2.2. (a) Donner la propriétés de la partie réelle d'une somme/différence/produit par un réel.
   (b) Que peut-on dire de $\mathrm{Re}(zz')$?
   (c) Compléter : $\mathrm{Re}(z_1+z_2+\cdots+z_n) =$
   (d) Réécrire l'égalité ci-dessus avec le symbole Σ.

Conjugué

2.3. Compléter les égalités suivantes :

- $z+\overline{z} =$ .... et donc : $\mathrm{Re}(z) =$ ....
- $z-\overline{z} =$ .... et donc : $\mathrm{Im}\,(z) =$ ....
- $z \in \mathbb{R} \iff$ ....
- $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow$ ....
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{z+z'} =$ ....
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{z-z'} =$ ....
- $\overline{zz'} =$ ....
- si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$ ....
- si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} =$ ....
- $\overline{\overline{z}} =$ ....
- $z\overline{z} =$ ....

2.4. Donner la forme algébrique de $\frac{3-5i}{2+3i}$, $\frac{1+i}{3i-2}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{1}{3i}$

2.5. Que peut-on dire des racines d'un polynôme à coefficients réels ?

2.6. On pose $\alpha = 1+i$. Vérifier que α est racine du polynôme P défini par $P(X) = X^3-5X^2+8X-6$. En déduire une autre racine.

Module et argument

2.7. (a) Donner la définition du module d'un complexe z.
   (b) Donner l'interprétation géométrique de $|z[$.
   (c) Donner l'interprétation géométrique de $|z_1-z_2[$.
   (d) Tracer l'ensemble des complexes z tels que $|z| = 2$.
   (e) Tracer l'ensemble des complexes z tels que $|z-i| = 3$.

2.8. Compléter les égalités suivantes :

(a)
$$|z|^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(b) i. $|zz'| = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $|z^n| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

ii. **Inégalité triangulaire :** $|z + z'|\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

iii. Optionnel : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leq |z - z'| \leq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$..

2.9. Compléter la propriété suivante du cours : Soient $z \in \mathbb{C}$. On a :

(a) **Module de z et de sa partie réelle :** $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

(b) **Module de z et de sa partie imaginaire :** $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

(c) **Module de z, $\overline{z}$ et $-z$:** $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

(d) **Caractérisation d'un complexe nul par son module** $z = 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots$.

2.10. (a) Donner la définition de l'argument d'un complexe $z \neq 0$.

(b) Donner l'interprétation géométrique de $\arg(z)$.

(c) Déterminer un argument des complexes suivants, en évitant si possible des calculs inutiles.

$$z_1 = \sqrt{3} + 3i \quad ; \quad z_2 = 1 + i \quad ; \quad z_3 = -i \quad ; \quad z_4 = -5 \quad ; \quad z_5 = 2$$

Forme exponentielle d'un complexe.

2.11. Donner la définition de $e^{i\theta}$.

2.12. Donner les deux formules d'Euler.

2.13. Compléter les égalités ci-dessous :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad ; \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

2.14. Donner les 4 formule d'addition.

2.15. Donner les formules de duplication.