Programme de colle n° 2
Semaine du 28/09/2019

Table des matières

Vous serez interrogé sur une ou deux des questions de cours listées ci-dessous. Puis sur un exercice préparé et enfin un ou plusieurs exercices non préparés. La question de cours doit être parfaitement sue. L'exercice préparé doit être traité correctement également.

1 Exercices préparés et démonstrations

Exercice préparé 1

Énoncer et démontrer la propriété des racines d'un polynôme à coefficients réels.

Exercice préparé 2

Linéariser $\cos^4 x$. (c'est l'exercice 8 de la feuille d'exercices n° 2).

Exercice préparé 3

Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

Pour les avancés (plus de 10 au dernier DST) :

Exercice préparé 4

Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

2 Compétences attendues.

Généralités sur les fonctions

- Savoir déterminer un domaine de définition. Notamment savoir refaire l'exemple 2 du chap. 1 et les questions 2, 3 et 4 de l'exercice 1 de la feuilles d'exercices n° 1.

- Savoir déterminer simplement la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle (exemples 8 et 9 du chap. 1).

- Savoir calculer une dérivée en utilisant les formules de dérivées. Savoir notamment retrouver les dérivées l'exercice 5 de la feuilles d'exercices n° 1 (sans forcément savoir justifier le domaine de dérivation).

- Savoir effectuer un changement de variables pour calculer une limite. Savoir refaire tous les exemples donnés en cours :
  1. $\lim_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x)$.
  2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2-\ln(x^3)+1$
  3. $\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$.

- Savoir utiliser $a^b = e^{b\ln a}$ (si $a > 0$) pour :
  - Savoir Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
  - Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x^x$ (Ecricome 1996).
    1. Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
    2. Justifier que f est dérivable et la dériver pour étudier ses variations.

- Savoir utiliser les croissances comparées pour calculer des limites. Savoir notamment refaire les exemples du cours.

Complexes

1. Savoir mettre un complexe sous forme algébrique, savoir notamment appliquer la méthode du conjugué.

2. Savoir déterminer le module et l'argument d'un complexe. Savoir éviter de faire des calculs quand c'est possible. Savoir mettre sous forme exponentielle et diviser deux formes exponentielles.

3. Savoir linéariser une expression du genre $\cos^3 x$ ou $\cos^4 x$ en utilisant les formules d'Euler.

4. Savoir manipuler le conjugué dans un calcul.

3 Questions de cours

Généralités sur les fonctions

1.1. (a) Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de $x \mapsto \sqrt{x}$.

Réponse attendue : Domaine de def : $\mathbb{R}_+$, domaine de dérivabilité : $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Compléter la troisième colonne des tableaux ci-dessous :

N°	$f(x)$	$f'(x)$
1	x^n $n \in \mathbb{Z}^*$	
2	$\frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{Z}^*$	
3	e^x	
4	$\ln x$	
5	$\cos x$	
6	$\sin x$	

N°	$f(x)$	$f'(x)$
1	x^3	
1	x^3	
2	x^{-3}	
3	$\sqrt{x}$	
4	$x^{\frac{3}{2}}$	
5	$x^{-\frac{3}{2}}$	
6	$\frac{1}{x^3}$	
7	$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$	

Réponse attendue : :

N°	$f(x)$	$f'(x)$
1	x^n $n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}
2	$\frac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{Z}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
3	e^x	e^x
4	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
5	$\cos x$	$-\sin x$
6	$\sin x$	$\cos x$

N°	$f(x)$	$f'(x)$
1	x^3	$3x^2$
1	x^3	$3x^2$
2	x^{-3}	$-3x^{-4}$
3	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4	$x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
5	$x^{-\frac{3}{2}}$	$-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$
6	$\frac{1}{x^3}$	$-\frac{3}{x^4}$
7	$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{-\frac{3}{2}}{x^{\frac{5}{2}}}$

1.2. Compléter la quatrième colonne des tableaux ci-dessous :

N°	Opération	*Fonction*	Dérivée
1	Somme	$u+v$	
2	Produit par une constante	ku	
3	Produit	uv	
4	Puissance $(n \in Z^*)$	u^n	
5	Inverse d'une puissance entière $(n \in Z^*)$	$\frac{1}{u^n}$	
6	Inverse	$\frac{1}{u}$	
7	Quotient	$\frac{u}{v}$	

N°	Opération	*Fonction*	Dérivée
8	Racine carrée	$\sqrt{u}$	
9	Exponentielle	e^u	
10	Logarithme	$\ln u$	
11	Sinus	$\cos u$	
12	Cosinus	$\sin u$	
13	Composée	$f(u)$	

Réponse attendue :

N°	Opération	*Fonction*	Dérivée
1	Somme	$u+v$	$u'+v'$
2	Produit par une constante	ku	ku'
3	Produit	uv	$u'v+v'u$
4	Puissance $(n \in Z^*)$	u^n	$nu'u^{n-1}$
5	Inverse d'une puissance entière $(n \in Z^*)$	$\frac{1}{u^n}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$
6	Inverse	$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
7	Quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

N°	Opération	*Fonction*	Dérivée
8	Racine carrée	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
9	Exponentielle	e^u	$u'e^u$
10	Logarithme	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
11	Sinus	$\cos u$	$-u' \sin u$
12	Cosinus	$\sin u$	$u' \cos u$
13	Composée	$f(u)$	$u'f'(u)$

Fonctions paires et impaires et fonctions T-périodiques

1.3. (a) Donner la définition d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Réponse attendue : def donné dans le cours.
Une fonction peut-elle être ni paire ni impaire ?
Réponse attendue : Oui. Peut-elle être paire et impaire ?
Réponse attendue : Oui, c'est alors la fonction nulle.
Donner la propriété de symétrie des courbes des fonctions paires et impaires
Réponse attendue : On attend la proposition 17 du chap. 1.

(b) Donner la définition d'une fonction T-périodique.
Réponse attendue : (repa définition 14 du chap. 1.)

Limites usuelles - limites de suites

1.4. (a) Donner la limite quand $n \to +\infty$ de (n^α) dans le cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$.
Réponse attendue : voir Cours.

(b) Donner la limite quand $n \to +\infty$ de (q^n) dans selon les valeurs de q.
Réponse attendue : voir Cours.

(c) Énoncer toutes les limites de croissances comparées des suites.
Réponse attendue :

- $\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0.$
- $\forall q > 1,\ \forall \alpha > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n^\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0.$
- $\forall q \in]-1,1[,\ \forall \alpha > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n n^\alpha = 0.$
- $\forall q > 1,\ \forall \beta > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{q^n}{(\ln n)^\beta} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{q^n} = 0.$
- $\forall q \in]-1,1[,\ \forall \alpha > 0,\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n (\ln n)^\beta = 0.$

Croissances comparées de fonctions

1.5. Énoncer toutes les limites de croissance comparée des fonctions vues dans le cours.
Réponse attendue :

- $\forall \alpha > 0,\ \forall \beta > 0,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$
- $\forall \alpha > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha (\ln x)^n = 0.$
- $\forall \alpha > 0,\ \forall \gamma > 0,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\gamma x}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha} = +\infty.$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \gamma > 0,\quad \lim\limits_{x \to 0} x^\alpha e^{\gamma x} = 0.$

- $\forall \gamma > 0,\ \forall \beta > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\gamma x}}{(\ln x)^\beta} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{e^{\gamma x}} = 0.$

Limites de taux d'accroissement

1.6. Énoncer toutes les limites de taus d'accroissement.
Réponse attendue :

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Fonction tangente

1.7. (a) Donner la définition de la fonction $\tan$.
Réponse attendue : La fonction $\tan$ est définie par : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

(b) Donner le domaine de définition de la foncion $\tan$.
Réponse attendue : La fonction $\tan$ est définie sur $\mathbb{R}$ privé de tous les $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où k est un entier. Elle possède donc un infinité de valeurs interdites qui sont : $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, ... et $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$
Pour les avancés, on attend la réponse suivante :

$$D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(c) Donner les propriété de parité et de périodicité de la fonction $\tan$. Et expliquer ces propriétés.
Réponse attendue : La fonction $\tan$ est impaire et π-périodique. Cela signifie que $\tan(-x) = -\tan x$ et que $\tan(x + \pi) = \tan x$ (pour x pris dans le domaine de définition).

(d) Donner et démontrer les deux formules de dérivées de la fonction $\tan$.
Réponse attendue : $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. En effet :

$$\begin{aligned}
\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' &= \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x
\end{aligned}$$

Complexes

Forme algébrique - partie réelle - partie imaginaire

On n'attends pas que vous donniez la définition de ces trois choses, mais que vous sachiez facilement donner la forme algébrique de nombres simples (comme dans l'exercice de cours 1 du chap. 2). Il faut savoir aussi donner la partie réelle ou la partie imaginaire d'un nombre donné.

2.1. (a) Donner 4 ou 5 imaginaires purs et placez-les dans le plan complexe.
Réponse attendue : Ce que vous voulez tant que ce sont des imaginaires purs ! Voir éventuellement l'exemple 1 du chap. 2.

(b) Donner la forme algébrique de $(3 - 7i)(2 + 8i)$, $\frac{1}{i}$, $(1 + i)^2$, $(1 + 2i)^3$, i^{12}
Réponse attendue : Voir la correction de l'exercice de cours 1 du chap. 2.

(c) On pose $a = 3 - 4i$ et $b = 3 - 5i$. Donner la forme algébrique de $a + ib$.
Réponse attendue : Voir la correction de l'exercice de cours 2 du chap. 2.

2.2. (a) Donner la propriétés de la partie réelle d'une somme/différence/produit par un réel.
Réponse attendue : Pour $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \quad ; \quad \mathrm{Re}(z-z') = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z') \quad ; \quad \mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$$

$$\mathrm{Im}\,(z+z') = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z') \quad ; \quad \mathrm{Im}\,(z-z') = \mathrm{Im}\,(z) - \mathrm{Im}\,(z') \quad ; \quad \mathrm{Im}\,(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}\,(z)$$

(b) Que peut-on dire de $\mathrm{Re}(zz')$?
Réponse attendue : Rien et surtout pas c'est égal à $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$.

(c) Compléter : $\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) =$
Réponse attendue : $\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) + \cdots + \mathrm{Re}(z_n)$

(d) Réécrire l'égalité ci-dessus avec le symbole Σ.
Réponse attendue : $\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(z_k)$

Conjugué

2.3. Compléter les égalités suivantes :

- $z + \overline{z} =$ .... et donc : $\mathrm{Re}(z) =$ ....
- $z - \overline{z} =$ .... et donc : $\mathrm{Im}\,(z) =$ ....
- $z \in \mathbb{R} \iff$ ....
- $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow$ ....
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{z+z'} =$ ....
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{z-z'} =$ ....
- $\overline{zz'} =$ ....
- si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$ ....
- si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} =$ ....
- $\overline{\overline{z}} =$ ....
- $z\overline{z} =$ ....

Réponse attendue :

- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et donc : $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$
- $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\,(z)$ et donc : $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$
- $z \in \mathbb{R} \iff z - \overline{z} = 0 \iff z = \overline{z}$
- $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \iff z + \overline{z} = 0 \iff z = -\overline{z}$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
- si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
- si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2$

2.4. Donner la forme algébrique de $\frac{3-5i}{2+3i}$, $\frac{1+i}{3i-2}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{1}{3i}$
Réponse attendue : Voir correction de l'exercice de cours n° 3 du chap. 2.

2.5. Que peut-on dire des racines d'un polynôme à coefficients réels ?
Réponse attendue : Si P est un polynôme à coefficients réel et que α est une racine de P alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

2.6. On pose $\alpha = 1 + i$. Vérifier que α est racine du polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 5X^2 + 8X - 6$. En déduire une autre racine.
Réponse attendue : Voir correction de l'exercice de cours n° 6 du chap. 2.

Module et argument

2.7. (a) Donner la définition du module d'un complexe z.
Réponse attendue : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

(b) Donner l'interprétation géométrique de $|z[$.
Réponse attendue : C'est la distance entre l'origine du plan complexe et le point image de z. (On peut aussi dire plus simplement la distance entre z et 0.)

(c) Donner l'interprétation géométrique de $|z_1 - z_2[$.
Réponse attendue : C'est la distance entre z_1 et z_2.

(d) Tracer l'ensemble des complexes z tels que $|z| = 2$.
Réponse attendue : C'est le cercle de centre l'origine du repère et de rayon 2. Mais il faut l'avoir compris, ne pas apprendre cette réponse par cœur !

(e) Tracer l'ensemble des complexes z tels que $|z - i| = 3$.
Réponse attendue : C'est le cercle de centre i et de rayon 3. Mais il faut l'avoir compris, ne pas apprendre cette réponse par cœur !

2.8. Compléter les égalités suivantes :

(a)
$$|z|^2 = \dots\dots\dots\dots$$

Réponse attendue : $|z|^2 = z\overline{z}$

(b) i. $|zz'| = \dots\dots$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \dots\dots$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \dots\dots$; $|z^n| = \dots\dots$.

ii. **Inégalité triangulaire :** $|z+z'|\dots\dots\dots\dots$.

iii. Optionnel : $\dots\dots\dots\dots \leq |z-z'| \leq \dots\dots\dots\dots$..

Réponse attendue :

i. $|zz'| = |z||z'|$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; $|z^n| = |z|^n$.

ii. **Inégalité triangulaire :** $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.

iii. Optionnel : $\big||z| - |z'|\big| \leq |z-z'| \leq |z| + |z'|$.

2.9. Compléter la propriété suivante du cours : Soient $z \in \mathbb{C}$. On a :

(a) **Module de z et de sa partie réelle :** $\dots\dots\dots\dots$.

(b) **Module de z et de sa partie imaginaire :** $\dots\dots\dots\dots$.

(c) **Module de z, $\overline{z}$ et $-z$:** $\dots\dots\dots\dots$.

(d) **Caractérisation d'un complexe nul par son module** $z = 0 \iff \dots\dots$.

Réponse attendue :

(a) **Module de z et de sa partie réelle :** $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.

(b) **Module de z et de sa partie imaginaire :** $\mathrm{Im}\,(z) \leq |\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.

(c) **Module de z, $\overline{z}$ et $-z$:** $|z| = |\overline{z}| = |-z|$.

(d) **Caractérisation d'un complexe nul par son module** $z = 0 \iff |z| = 0$.

2.10. (a) Donner la définition de l'argument d'un complexe $z \neq 0$.
Réponse attendue : On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|z|} \end{cases}$$

On note alors $\theta = Arg(z)$.

(b) Donner l'interprétation géométrique de $\arg(z)$.
Réponse attendue : Faire un schéma indiquant que $\arg(z)$ est l'angle orienté allant de la demi-droite des réels positifs au vecteur d'origine O et d'extrémité z.

(c) Déterminer un argument des complexes suivants, en évitant si possible des calculs inutiles.

$$z_1 = \sqrt{3} + 3i \quad ; \quad z_2 = 1 + i \quad ; \quad z_3 = -i \quad ; \quad z_4 = -5 \quad ; \quad z_5 = 2$$

Réponse attendue : Voir la correction de l'exercice de cours n° 7 du chap. 2. Ne surtout pas apprendre le résultat par cœur ! il faut avoir compris la méthode !

Forme exponentielle d'un complexe.

2.11. Donner la définition de $e^{i\theta}$.
Réponse attendue : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

2.12. Donner les deux formules d'Euler.
Réponse attendue : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

2.13. Compléter les égalités ci-dessous :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \dots\dots\dots \quad ; \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \dots\dots\dots.$$

Réponse attendue :

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \quad ; \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$ Attention au "i" du $2i$!.

2.14. Donner les 4 formule d'addition.
Réponse attendue :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b$$

2.15. Donner les formules de duplication.
Réponse attendue :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a$$