Chapitre 3

Éléments de logique et Raisonnement par récurrence

Table des matières

1 Éléments de logique

1.1 Proposition, connecteurs logiques

1.1.1 Proposition

Définition 1. (Proposition logique)
On appelle proposition toute phrase mathématique qui a un sens et qui peut être vraie ou fausse..

Exemple 1.

- $x = 3$ est une proposition dont la vérité dépend de x.
- $x \leq y$ est une proposition dont la vérité dépend de x et de y.
- $2 + 3 = 5$ est une proposition vraie.
- $2 + 3 = 6$ est une proposition fausse.
- $2 + 3$ est un énoncé mathématique qui a un sens mais ça n'est pas une proposition.
- $2 \lim 3$ est un énoncé qui n'a aucun sens. Ce n'est donc pas une proposition.
- $x \in E$ est une proposition dont la vérité dépend de x et de E.
- $3 \in \mathbb{Z}$ es une proposition vraie.
- $\pi \in \mathbb{Q}$ est une proposition fausse.

En fait, presque tous les énoncés mathématiques, dès qu'ils ont un sens, sont des propositions :

Exemple 2.

- « $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ »est une proposition vraie.
- « $x \mapsto x^2$ *est croissante sur* $\mathbb{R}$ » est une proposition fausse.
- « x^2 *est croissante sur* $\mathbb{R}_+$ » N'est pas une proposition cette phrase n'a aucun sens.
- « $(x - 3)(x - 2) \geq 0$ » est vraie si $x \leq 2$ ou si $x \geq 3$ et fausse sinon.
- « $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{x}$ » n'est pas une proposition ! Car cette phrase n'a aucun sens.
- « $\sqrt{-1} = i$ » n'est pas une proposition car $\sqrt{-1}$ n'a aucun sens.
- Le théorème de Pythagore est une proposition vraie.
- « *Tout nombre entier pair supérieur à* 3 *est la somme de deux nombres premiers* » est une proposition dont on ne sait pas si elle est vraie ou fausse : c'est la conjecture de Goldbach (1742), on la notera **Gold**.
- « *Tout nombre impair supérieur ou égal à 9 est somme de trois nombres premiers impairs.* » est aussi une proposition dont on ne sait pas si elle est vraie ou fausse (c'est la conjecture de Goldbach faible) on la notera **GoldF**.

Une proposition est souvent formée de propositions plus petites :

Exemple 3.
« Si $a = b$ Alors $a^2 = b^2$ » est une proposition formée des propositions« $a = b$ » et « $a^2 = b^2$ ».

1.1.2 Connecteurs logiques

1.1.2.1 "et" et "ou" logiques

On construit de nouvelles propositions à l'aide des deux connecteurs logiques que sont le **et logique** et le **ou logique**.

Définition 2. ("et" et "ou" logiques)
Soient A et B deux propositions.

- La proposition « A et B » est la proposition qui est vraie si A et B sont toutes les deux vraies.
- La proposition « A ou B » est la proposition qui est vraie si l'une au moins des propositions A et B est vraie.

Exemple 4.

1. « $2 + 3 = 5$ et $3 \times 2 = 6$ » est une proposition vraie.
2. « $2 + 3 = 5$ et $3 \times 2 = 7$ » est une proposition fausse.
3. « $2 + 3 = 4$ et $3 \times 2 = 7$ » est une proposition fausse.
4. « $2 + 3 = 5$ ou $3 \times 2 = 6$ » est une proposition vraie.
5. « $2 + 3 = 5$ ou $3 \times 2 = 7$ » est une proposition vraie.
6. « $2 + 3 = 4$ ou $3 \times 2 = 7$ » est une proposition fausse.

On a donc la "table de vérité" suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$
V	V	V	V
F	V	F	V
V	F	F	V
F	F	F	F

1.1.2.2 implication

On crée également de nouvelles propositions à l'aide du connecteur $\Longrightarrow$.

Définition 3. (Implication)

$A \Longrightarrow B$ (se lit "A implique B") signifie : **Si A est vraie, alors B est vraie.**

Cette proposition est une **implication**

Exemple 5.
Si on sort du champ des mathématiques et que l'on note P le fait qu'il pleuve et A le fait que mon jardin soit arrosé.

- « $P \Longrightarrow A$ » est vraie.
- « $A \Longrightarrow P$ » est fausse car j'ai peut-être arrosé mon jardin moi-même.

Mais hors du champ mathématique, beaucoup de propositions peuvent être longuement discutées quant à leur vérité.

Définition 4. (Réciproque d'une implication)

La réciproque de « $A \Longrightarrow B$ » est l'implication « $B \Longrightarrow A$" ».

Attention ! Comme le montre l'exemple ci-dessus, une implication peut être vraie et sa réciproque fausse ! C'est même assez souvent le cas.

Méthode à retenir nº 1

Comment prouver qu'une implication est vraie ?

Pour montrer que $A \Longrightarrow B$ est vraie, on suppose que A est vraie et on montre que sous cette hypothèse, B est vraie.
La démonstration de $A \Longrightarrow B$ doit donc commencer par "supposons que A est vraie".

Remarque. Nous verrons plus loin une autre méthode pour prouver une implication : la méthode par contraposée.

Exemple 6.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $1 < x < 2$ alors $\dfrac{(x-1)^{n+1} - x^n}{x^2} < 0$.

Exemple 7.
Montrer que : **Gold** $\Longrightarrow$ **GoldF** (voir l'exemple 2 pour la définition de **Gold** et **GoldF**)

On voit ci-dessus qu'on peut prouver que « $A \implies B$ » est vraie sans savoir si A et B sont vraies.

Méthode à retenir n° 2

Comment prouver qu'une implication est fausse ?

Pour montrer que $A \implies B$ est fausse, on exhibe un **contre-exemple** pour lequel A est vraie et pourtant B est fausse.

Exemple 8.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ Montrer que « $ab > 0 \implies a > 0$ et $b > 0$ » est fausse.
Que dire de sa réciproque ? Le prouver.

1.1.2.3 Equivalence

Définition 5. (Equivalence)

« $A \iff B$ » signifie : « $A \implies B$ et « $B \implies A$fg

« $A \iff B$ » se lit, selon le contexte : « A est équivalent(e) à B »
ou « A équivaut à B »
ou « A si et seulement si B ».

Remarque. On peut, si on veut écrire vite, utiliser l'abréviation « **ssi** »pour « **si et seulement si** »

Exemple 9. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$.

1. $a = b \iff a - b = 0$.
2. $ab > 0$ si et seulement si a et b sont de même signe.
3. $ab < 0$ si et seulement si a et b sont de signe contraire.

1.2 Négation d'une proposition

1.2.1 Définition

Définition 6. (Négation)
Soit $\mathcal{P}$ une proposition, on note « non $\mathcal{P}$ » la proposition contraire de $\mathcal{P}$ appelée négation de $\mathcal{P}$ qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse, et fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie

Exemple 10. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et E un ensemble de réels.

- La négation de « $x = y$ » est $x \neq y$.
- La négation de « $x \leq y$ » est $x > y$.
- La négation de « $x \in E$ » est $x \notin E$.

Proposition 1. (Négation d'un « et » et d'un « ou ») (admis)

- La négation de « A et B » est $(\text{non } A)$ ou $(\text{non } B)$.
- La négation de « A ou B » est $(\text{non } A)$ et $(\text{non } B)$.

Exemple 11. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et E un ensemble de réels.

- La négation de « $x = 1$ ou $x = 2$ » est $x \neq 1$ et $x \neq 2$.
- La négation de « $1 \leq x \leq 2$ » est $x < 1$ ou $x > 2$.
- La négation de « $x \in E$ ou $x \geq 0$ » est $x \notin E$ et $x < 0$.

1.2.2 Contraposée d'une implication

Reprenons l'exemple de la pluie et du jardin vu plus haut. On comprends aisément que si le jardin n'est pas arrosé, on peut en conclure qu'il ne pleut pas. Ainsi, on voit que l'implication « non $A \implies$ non P » est vraie. Cette implication est la contraposée de l'implication « $P \implies A$ ».

Définition 7. (Contraposée d'une implication)

On appelle contraposée de l'implication « $A \implies B$ » L'implication « non $B \implies$ non A »

L'exemple ci-dessus nous montre que si $P \implies A$ est vraie alors sa contraposée ausssi. Et réciproquement. Autrement dit :

Proposition 2. (Equivalence de la contraposée) (admis)

Une implication est équivalente à sa contraposée.

Remarque. Pour prouver une proposition, on peut donc toujours prouver sa contraposée. C'est parfois plus facile. On dit alors que l'on fait une **démonstration par contraposée**.

Exemple 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.

Attention ! On prendra garde à ne pas confondre contraposée et réciproque ! Une implication n'est pas équivalente à sa réciproque !

1.2.3 Négation d'une implication

Pour les expert.e.s...

Proposition 3. (Négation d'une implication) (admis)

La négation de « $A \implies B$ » est A et $(\text{non } B)$.

1.3 Quantificateurs

1.3.1 Définition

Il est très souvent utile de pouvoir signifier qu'une proposition est vraie pour toute valeur d'une variable x ou pour au moins une valeur. On utilise pour cela les **quantificateurs** :

- « $\forall a \in A,$ » se lit « **pour tout** a **appartenant à** A » ou « quelque soit a appartenant à A »
- « $\exists a \in A,$ » se lit « **il existe** a **appartenant à** A **tel que** »

Exemple 13.

1. « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ » est une proposition vraie.
2. « $\exists x \in [0, +\infty[$ tel que $x^2 + x \geq 12$ » est une proposition vraie.
3. « $\exists x \in [0, +\infty[$ tel que $x^2 + x = 12$ » est une proposition vraie.
4. « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq x$ » set lit :

   « Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ il existe n appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $n \geq x$ »

   et est une proposition vraie.

5. « $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \geq x$ » set lit :

   « Il existe n appartenant à $\mathbb{N}$ tel que Pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ il existe n appartenant à $\mathbb{N}$ tel que $n \geq x$ »

   et est une proposition fausse.

Les exemples 3 et 4 ci-dessus montre que l'ordre des quantificateurs est important ! On ne peut pas intervertir un $\forall$ et un $\exists$.

On peut aussi utiliser le quantificateur suivant :

- « $\exists! a \in A$, se lit « **il existe un unique** a **appartenant à** A **tel que** »

Mais l'utilisation de la notation ci-dessus est **réservée aux expert.e.s** qui sont certain.e.s de bien l'utiliser et de ne pas la confondre avec la factorielle.

1.3.2 Démontrer une proposition avec quantificateur

Méthode à retenir n° 3

Démontrer une proposition commençant par un $\forall$

On considère ici une proposition notée $\mathcal{P}(x)$ dont la vérité dépend de x (par exemple $x^2 + 3x = 12$).
Pour démontrer une proposition de la forme « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$», on peut prendre un élément générique x de E et on démontre que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour ce x. La démonstration doit donc commencer par : « Soit $x \in E$ »

Exemple 14.
Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n-1}{n} < \dfrac{n}{n+1}$.

Méthode à retenir n° 4

Démontrer une proposition commençant par un $\exists$

Pour démontrer une proposition de la forme « $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$», on peut trouver **un** élément x de E particulier pour lequel $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Exemple 15.
Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$, tel que $n^2 + 4 = 20$.

Remarque. *Pour les expert.e.s ...*
Que pensez-vous de la proposition $\exists! n \in \mathbb{Z},\ n^2 + 4 = 20$? ?

1.3.3 Négation des propositions avec quantificateurs

Proposition 4. (Négation des propositions avec quantificateurs) (admis)

1. La négation de « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ » est « $\exists x \in E$, non $\mathcal{P}(x)$ »
2. La négation de « $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ » est « $\forall x \in E$, non $\mathcal{P}(x)$ »

Remarque.
La première assertion signifie que pour montrer le contraire d'une d'une proposition de la forme « $\forall x, \mathcal{P}(x)$ », on exhibe un contre-exemple.

Exemple 16.

- non $[\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n] \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$
- non $[\exists n \in \mathbb{N}, X = n] \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, X \neq= n$
- non $[\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0] \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
- non $[\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M] \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n < M$

2 Récurrence d'ordre 1 et 2

Proposition 5. ((Rappel) : Principe de récurrence d'ordre 1) (admis)
Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\textbf{Si} \quad \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \text{et} \\ \forall n \geq n_0,\ \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1) \end{cases} \quad \textbf{Alors} \quad \forall n \geq n_0,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Exercice de cours 1.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2 \quad \text{et} \quad u_0 = 2.$$

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 3^n.$$

Exercice de cours 2.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n \quad \text{et} \quad u_0 = 2.$$

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

Proposition 6. (Principe de récurrence d'ordre 2) (admis)
Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\textbf{Si} \quad \begin{cases} \mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ \text{et} \\ \forall n \geq n_0,\ \Big(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)\Big) \implies \mathcal{P}(n+2) \end{cases} \quad \textbf{Alors} \quad \forall n \geq n_0,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}$$

Exercice de cours 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 3^n$.