Feuille d'exercices n° 3 - Éléments de logique et démonstrations par récurrence

Exercice 1. (★★) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.
Compléter les propositions par les symboles $\implies$, $\impliedby$ ou $\iff$:

1. $x = 3 \quad \ldots \quad x^2 = 9$
2. $x = 2\pi \quad \ldots \quad e^{ix} = 1$
3. $e^x = 1 \quad \ldots \quad x = 0$
4. $x(x+2) = x(2x+3) \quad \ldots \quad x = -1$
5. $x^2 \geq 9 \quad \ldots \quad x \geq 3$
6. Pour $x > 0$, $\ln(x^4) = 16 \quad \ldots \quad \ln(x) = 4$.

Exercice 2. (★★★) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Traduire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est une fonction constante
2. f n'est pas une fonction constante
3. f est une fonction affine
4. f est paire
5. f est 3-périodique
6. f est périodique
7. f est croissante sur $\mathbb{R}$.
8. 2 possède un antécédent par f.
9. Tout réel y possède un antécédent par f.

Exercice 3. (★★) Soit x un réel.
Traduire à l'aide de quantificateur les propositions suivantes :

1. x est un entier pair
2. x est un entier impair
3. x est un rationnel
4. x est un irrationnel

Exercice 4. (★) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie sur I.
Exprimer les négations des propositions suivantes :

1. $\forall x \in I, f(x) \neq 0$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) = y$
3. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, |f(x)| \leq M$
4. $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
5. $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y$
6. $\forall x \in I, f(x) > 0 \implies x \leq 0$.

Exercice 5. (☆) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3 \quad \text{et} \quad u_0 = 7.$$

Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+2} + 3.$$

Exercice 6. (★) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3n(n+1) + 1 \quad \text{et} \quad u_0 = 0.$$

1. Conjecturer l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Démontrez votre conjecture par récurrence.

Exercice 7. (★)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \geq 1,\ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{n}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

Exercice 8. (★)
Démonter par récurrence que pour tout entier naturel n, $3^n \geq 1 + 2n$

Exercice 9. (★★)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.
Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{2}$

Exercice 10. (★) Une suite récurrente linéaire d'ordre 2
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2,\ u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 2^n$.

Exercice 11. (★★) Suite de Fibonacci
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 0,\ v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.
Montrer que, $\forall n \geq 1,\ v_n \leq 2^{n-1}$.

Exercice 12. (★★)
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 = w_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = (n+1)(w_{n+1} + w_n)$.
Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = n!$.
On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 2 \times \cdots \times n$ ***et que*** $0! = 1$***.***

Exercice 13. (★★★) Identité de Cassini
On note $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (suite de Fibonacci).
Montrer que que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.