Exercice de calcul du jeudi 1er octobre

Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
Vous présenterez le résultat sous la forme $\sin x \times P(\cos x)$ où P est un polynôme à déterminer.

Indication :

Il y a deux méthodes (au moins) au choix :

Méthode 1 : $\sin(3x) = \sin(2x + x) = \cdots$

Méthode 2 :

$\sin(3x) = \mathrm{Im}\left(e^{i\times 3x}\right)$.

Or $e^{i\times 3x} = \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cdots$

Exercice de calcul du jeudi 1er octobre

Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
Vous présenterez le résultat sous la forme $\sin x \times P(\cos x)$ où P est un polynôme à déterminer.

Solution :

Méthode 1 :	**Méthode 2 :**
$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x + x) \\ &= \sin(2x)\cos x + \cos(2x)\sin x \\ &= 2\sin x\cos x\cos x + (2\cos^2 x - 1)\sin x \\ &= \sin x\,(2\cos^2 x + 2\cos^2 x - 1) \\ &= \boxed{\sin x\,(4\cos^2 x - 1)} \end{aligned}$	$\sin(3x) = \operatorname{Im}(e^{i\times 3x})$. Or $\begin{aligned} e^{i\times 3x} &= (e^{ix})^3 \\ &= (\cos x + i\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3\cos^2 x \times i\sin x + 3\cos x \times (i\sin x)^2 + (i\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \end{aligned}$ Donc : $\begin{aligned} \operatorname{Im}(e^{i\times 3x}) &= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x \\ &= \sin x\,(3\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \sin x\left(3\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)\right) \\ &= \boxed{\sin x\,(4\cos^2 x - 1)} \end{aligned}$