DM02 - Correction

Exercice 1

1. Méthode 1 : $f(x) = x^{-2n}$ donc $f'(x) = -2n\, x^{-2n-1}$

$$\iff \boxed{f'(x) = \frac{-2n}{x^{2n+1}}}$$

Méthode 2 : On applique la formule du cours : $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$

On obtient alors directement le même résultat.

2. $g = \frac{1}{v}$ Or $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ avec $v(x) = \ln x$

$v'(x) = \frac{1}{x}$

Donc $g'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x} \times \frac{1}{(\ln x)^2}$

$$= \boxed{-\frac{1}{x(\ln x)^2}}$$

3. $h(x) = (\ln x)^2$

$h = u^2$ avec $u(x) = \ln x$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$

Or $(u^2)' = 2u'u$

Donc $h'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \boxed{\frac{2\ln x}{x}}$

4. $i = u^{2020}$ avec, encore, $u(x) = \ln x$

Or $(u^n)' = n u' u^{n-1}$

Donc $i'(x) = 2020 \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^{2019}$

$$= \boxed{\frac{2020(\ln x)^{2019}}{x}}$$

Exercice 2

1. Cette équation est définie si $2x - 5 \geqslant 0$

$$\iff x \geqslant \frac{5}{2}$$

On résout donc dans $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$.

Soit $x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$

$\sqrt{2x-5} - x + 4 = 0$

$\iff \sqrt{2x-5} = x - 4$

$\implies 2x - 5 = (x-4)^2$

Ici on n'a qu'une implication et pas une équivalence.
Car $a = b \implies a^2 = b^2$
Mais $a^2 = b^2 \not\Rightarrow a = b$

$\iff 2x - 5 = x^2 - 8x + 16$

$\iff 0 = x^2 - 10x + 21$

$\Delta = 100 - 84 = 16 > 0$

$x_1 = \frac{10-4}{2} = 3$

$x_2 = \frac{10+4}{2} = 7$

⚠ Il y a une implication dans le raisonnement.
Ainsi 3 et 7 sont les seules solutions possibles, mais ne sont pas nécessairement solution.
Il faut alors les vérifier :

$\sqrt{2\times 3 - 5} - 3 + 4 = 1 + 1 = 2 \neq 0$ donc 3 n'est pas solution

$\sqrt{2\times 7 - 5} - 7 + 4 = \sqrt{9} - 3 = 0$ donc 7 est solution

Donc $\boxed{S = \{7\}}$.

Exercice 2 (suite)

2. $|x^2-3x| \leqslant x-2$

On étudie le signe de x^2-3x pour faire "sauter" la val. absolue.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Soit $x \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$.

Ici $x^2-3x \geqslant 0$ donc $|x^2-3x| = x^2-3x$.

$|x^2-3x| \leqslant x-2 \iff x^2-3x \leqslant x-2$

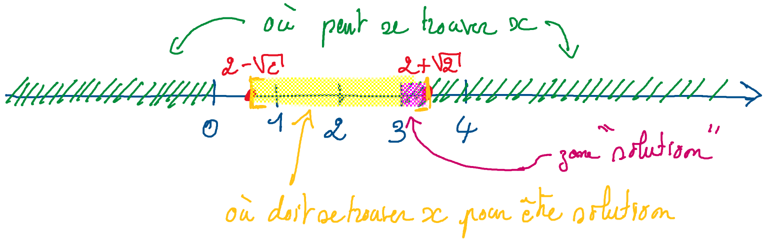
$\iff x^2-4x+2 \leqslant 0$

$\Delta = 16-8 = 8 > 0$ donc 2 racines réelles

$x_1 = \dfrac{4-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}$

$x_2 = 2+\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-4x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	



$[3, 2+\sqrt{2}]$ fait partie des solutions.

- Soit $x \in]0, 3[$.

Ici $x^2-3x < 0$ donc $|x^2-3x| = -x^2+3x$.

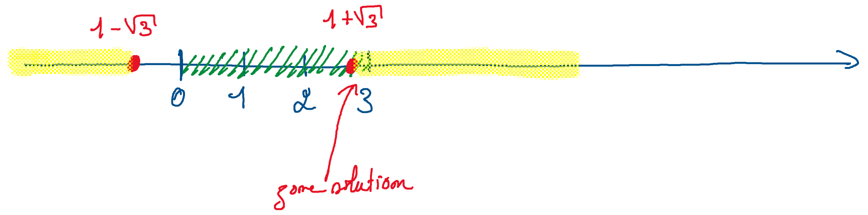
$|x^2-3x| \leqslant x-2 \iff -x^2+3x \leqslant x-2$

$\iff -x^2+2x+2 \leqslant 0$

$\Delta = 4+8 = 12 > 0$ donc 2 racines :

$x_3 = \dfrac{-2-\sqrt{12}}{-2} = \dfrac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3}$

$x_4 = \dfrac{-2+\sqrt{12}}{-2} = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}$



Donc $[1+\sqrt{3}, 3[$ fait partie des solutions.

D'où $\boxed{S = [1+\sqrt{3}, 2+\sqrt{2}]}$

Exercice 2 question 2 (suite)

Méthode "experte" pour la question 2 :

$$|x^2-3x| \leqslant x-2 \iff \begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ \text{et} \\ -(x-2) \leqslant x^2-3x \leqslant x-2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant 2 \\ \text{et} \\ -(x-2) \leqslant x^2-3x \quad \text{et} \quad x^2-3x \leqslant x-2 \end{cases}$$

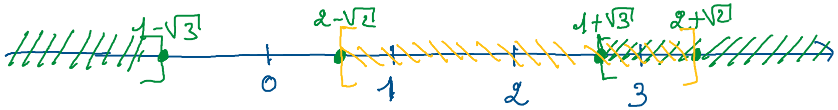
$$\iff \begin{cases} x \geqslant 2 \\ \text{et} \\ \underbrace{x^2-2x-2 \geqslant 0} \quad \text{et} \quad \underbrace{x^2-4x+2 \leqslant 0} \end{cases}$$

$\Delta = 4+8=12$ $\qquad$ $\Delta = 16-8=8$

$x_1 = \dfrac{2-\sqrt{12}}{2} = 1-\sqrt{3}$ $\qquad$ $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{8}}{2} = 2-\sqrt{2}$

$x_2 = 1+\sqrt{3}$ $\qquad$ $x_2 = 2+\sqrt{2}$.

$$\iff \begin{cases} x \geqslant 2 \\ \text{et} \\ x \in]-\infty, 1-\sqrt{3}] \cup [1+\sqrt{3}, +\infty[\quad \text{et} \quad x \in [2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}] \end{cases}$$



Donc $\boxed{S = [1+\sqrt{3}, 2+\sqrt{2}]}$

Exercice 3

1. $\varphi(x)$ est définie si $1-x>0$ et $x>0$ et $\ln x \neq 0$

$$\iff \quad x<1 \text{ et } x>0 \text{ et } x\neq 1$$

$$\iff \quad x \in \left]0,1\right[$$

Donc $\boxed{D_\varphi = [0,1]}$

2. $\ln(1-x) \geqslant 0$
$\iff \quad 1-x \geqslant e^0$
$\iff \quad 1-x \geqslant 1$
$\iff \quad x \leqslant 0$

$\ln x \geqslant 0$
$\iff \quad x \geqslant 1$

D'où le tableau :

x	0 $\qquad\qquad$ 1
$\ln(1-x)$	$-$
$\ln x$	$-$
$\varphi(x)$	$+$

3. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1-x) = \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \end{array}\right\}$ Par quotient : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = 0$.

Si on pose $X = 1-x$.

On a $x = 1-X$

et si $x \to 1^-$, alors $X \to 0^+$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln x} = \lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{\ln(X)}{\ln(1-X)}$

Or $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty \\ \lim\limits_{X\to 0^+} \ln(1-X) = 0^- \end{array}\right\}$ Par quotient : $\lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{\ln(X)}{\ln(1-X)} = +\infty$

Finalement : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = +\infty.}$

Remarque : Cette question était difficile et le changement de variable $X = 1-x$ n'était pas indispensable.

4. φ est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit $x \in]0,1[$,

$$\varphi'(x) = \frac{(\ln(1-x))' \ln x - (\ln x)' \ln(1-x)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\frac{-1}{1-x} \times \ln x - \frac{1}{x} \ln(1-x)}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\frac{-\ln x}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{\frac{-x\ln x - (1-x)\ln(1-x)}{(1-x)x}}{(\ln x)^2}$$

$$= \boxed{\frac{-x\ln x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)(\ln x)^2}}$$

5. (a) Soit $t \in]0,1[$.

$t > 0$ et $t < 1$ donc $\ln t < 0$

d'où $\boxed{t\ln t < 0}$

(b) Soit $x \in]0,1[$.

$1-x \in]0,1[$ donc, d'après la question 5.a, en posant $t = 1-x$,

$\boxed{(1-x)\ln(1-x) < 0}$

6. Soit $x \in]0,1[$,

On a $x\ln x < 0$ donc $-x\ln x > 0$

et $(1-x)\ln(1-x) < 0$ donc $-(1-x)\ln(1-x) > 0$

D'où $-x\ln x - (1-x)\ln(1-x) > 0$ (somme de 2 réels strictement positifs)

Or $x(1-x)(\ln x)^2 > 0$

D'où $\varphi'(x) > 0$

x	0		1
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

7. Voir ici