Programme de colle n° 3
Semaine du 05/10/2019

Table des matières

Vous serez interrogé sur une ou deux des questions de cours listées ci-dessous. Puis sur un exercice préparé et enfin un ou plusieurs exercices non préparés. La question de cours doit être parfaitement sue. L'exercice préparé doit être traité correctement également.

1 Exercices préparés et démonstrations

Exercice préparé 2

Linéariser $\cos^4 x$. (c'est l'exercice 8 de la feuille d'exercices n° 2).

Exercice préparé 3

Troisième polynôme de Tchebychev

1. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.
2. En déduire le polynôme T_3 tel que $\cos(3x) = T_3(\cos x)$

Exercice préparé 3

Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 1 + 2n$.

Pour les avancés (plus de 10 au dernier DST) :

Exercice préparé 4

Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

2 Questions de cours

2 - Complexes

Argument d'un complexe.

2.1. (a) Donner la définition de l'argument d'un complexe $z \neq 0$.
Réponse attendue : On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \\ \\ \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|z|} \end{cases}$$

On note alors $\theta = Arg(z)$.

(b) Donner l'interprétation géométrique de $\arg(z)$.
Réponse attendue : Faire un schéma indiquant que $\arg(z)$ est l'angle orienté allant de la demi-droite des réels positifs au vecteur d'origine O et d'extrémité z.

(c) Déterminer un argument des complexes suivants, en évitant si possible des calculs inutiles.

$$z_1 = \sqrt{3} + 3i \quad ; \quad z_2 = 1 + i \quad ; \quad z_3 = -i \quad ; \quad z_4 = -5 \quad ; \quad z_5 = 2$$

Réponse attendue : Voir la correction de l'exercice de cours n° 7 du chap. 2. Ne surtout pas apprendre le résultat par cœur ! il faut avoir compris la méthode !

Forme exponentielle d'un complexe.

2.2. Donner la définition de $e^{i\theta}$.
Réponse attendue : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

2.3. Donner les deux formules d'Euler.
Réponse attendue : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

2.4. Compléter les égalités ci-dessous :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad ; \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Réponse attendue :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) \quad ; \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$$ Attention au "i" du $2i$!.

2.5. Donner la forme exponentielle de i et de -1
Réponse attendue : $i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad -1 = e^{i\pi}$

2.6. Déterminer la forme exponentielle des complexes suivants. Pour l'argument on évitera les calculs inutiles...

$$z_1 = -1+i\sqrt{3} \quad ; \quad z_2 = 3-3i \quad ; \quad z_3 = \frac{1+i}{1-i} \quad ; \quad z_4 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad ; \quad z_5 = \frac{-2}{1+i} \quad ; \quad z_6 = (-1+i)^5$$

2.7. **Conjugué de** $e^{i\theta}$.
Recopier et compléter :

$$\overline{e^{i\theta}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Réponse attendue :

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

2.8. **Module de** $e^{i\theta}$**.**
Recopier et compléter :

$$\left|e^{i\theta}\right| = \ldots\ldots$$

Réponse attendue :

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1$$

Formules trigonométriques

2.9. Donner les 4 formule d'addition.
Réponse attendue :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a \sin b\\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a \sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a \sin b\\ \sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a \sin b\end{aligned}$$

2.10. Donner les formules de duplication.
Réponse attendue :

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a\\ \cos(2a) &= 2\cos^2 a - 1\\ \cos(2a) &= 1 - 2\sin^2 a\\ \sin(2a) &= 2\sin a\cos a\end{aligned}$$

3 - Logique et récurrence

Logique

3.1. (a) Donner la contraposée de l'implication $A \implies B$.
Réponse attendue : non $B \implies$ non A

(b) Donner la réciproque de l'implication $A \implies B$.
Réponse attendue : $B \implies A$

(c) Que peut-on dire d'une implication et de sa contraposée ? Et de sa réciproque ?
Réponse attendue : Une implication est équivalente à sa contraposée mais pas à sa réciproque.

3 Compétences attendues

2 - Complexes

Forme algébrique - partie réelle - partie imaginaire

2.1. Savoir mettre un complexe sous forme algébrique, savoir notamment appliquer la méthode du conjugué.
Exemple : Exercices de cours 1 à 5 du chap. 2 et deux premiers exercices de la FEDeux

2.2. Savoir déterminer le module et l'argument d'un complexe. Savoir éviter de faire des calculs quand c'est possible. Savoir mettre sous forme exponentielle et diviser deux formes exponentielles.
Exemple : Exercices de cours 7 et 10 du chap. 2 et exercice 5 de la feuilles d'exercices n° 2

2.3. Savoir manipuler le conjugué dans un calcul.
Exemple : Savoir refaire la démo de la proposition 5 du chap. 2 et les exercices 3 et 4 de la feuilles d'exercices n° 2

Forme exponentielle

2.4. Savoir mettre un complexe sous forme exponentielle.

Linéarisation et autres opérations trigonométriques

2.5. Savoir linéariser $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ à partir de la formule de duplication du cosinus $(\cos(2x) = \dots)$
Exemple : Nous l'avons fait plusieurs fois en cours...

2.6. Savoir linéariser $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, $\sin^3 x$ et $\sin^4 x$ en utilisant les formules d'Euler.
Exemple : Exercice de cours 8 du chap. 2 et exercice 8 et 9 (question 1) de la feuilles d'exercices n° 2
Pour les avancés : savoir faire aussi les questions 2 et 3 de l'exercice 9 de la feuilles d'exercices n° 2

2.7. Savoir écrire $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$. Savoir faire la même chose avec $\cos(4x)$.
Exemple : Exercice 10 de la feuilles d'exercices n° 2

2.8. Savoir trouver :

(a) la formule de $\cos a \cos b$ à partir de celles de $\cos(a + b)$ et $\cos(a - b)$,
(b) la formule de $\sin a \sin b$ à partir de celles de $\cos(a + b)$ et $\cos(a - b)$,
(c) la formule de $\sin a \cos b$ à partir de celles de $\sin(a + b)$ et $\sin(a - b)$.

Exemple : Voir exercice 13 de la feuilles d'exercices n° 2

2.9. Savoir calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ en utilisant la formule $\cos(a - b)$. Idem avec $\sin \frac{\pi}{12}$.
Exemple : Voir exercice 12 de la feuilles d'exercices n° 2.

2.10. Savoir exprimer $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ en fonction de $\cos(\theta)$. Idem pour $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Et savoir utiliser cette formule pour calculer $\cos \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$
Exemple : Voir exercice 11 de la feuilles d'exercices n° 2.

2.11. Savoir calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \cos(0) + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)$.
Exemple : Voir correction de l'exercice de cours n° 9 du chap. 2

3 - Logique et récurrence

Récurrence

3.1. Savoir rédiger proprement une démonstration par récurrence d'ordre 1 ou d'ordre 2.