Feuille d'exercices n° 4 - Suites réelles

Exercice 1. (☆)
Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0 = 2,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 7.$

Exercice 2. (☆)
Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0 = -1,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2u_{n+1} + 3.$

Exercice 3. (☆)
Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0 = 5,\ u_1 = 4,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n.$

Exercice 4. (☆)
Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0 = 1,\ u_1 = -1,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n.$

Exercice 5. (☆)
Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0 = -4,\ u_1 = 12,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{9}u_{n+2} - \frac{2}{3}u_{n+1}.$

Exercice 6. (☆)
Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0 = 2,\ u_1 = 5,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{n+2} + u_n\right).$

Exercice 7. (☆)
Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_1 = 2,\ u_2 = 3,$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 12u_{n-1} + u_n.$

Exercice 8. (☆)
Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0 = 1,\ u_1 = 2,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n.$

Exercice 9. (★)
Soit $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $u_0 = u_1 = 1,$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0.$

Exercice 10. (★) - quelques limites
Déterminer la limite des suites ci-dessous :

1. $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-1}$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $u_n = \frac{2^n-3^n}{n^2+3^n}$
4. $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$
5. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
6. $u_n = \frac{n^2+n-1}{n^2-n\cos(n)}$
7. $u_n = \ln(n) + \sin(n)$

Exercice 11. (★★) Deux suites conjointes
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1,\ v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Préciser sa valeur.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3. Déterminer les termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12. (★★) Deux autres suites conjointes
On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 2,\ y_0 = -1$ et pour tout entier naturel n :

$$x_{n+1} = -2x_n + y_n \text{ et } y_{n+1} = 2x_n - 3y_n.$$

1. Démontrer que (x_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de x_n puis de y_n en fonction de n.

Exercice 13. (★★)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_n \times u_{n+1}}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. On pose $v_n = \ln(u_n)$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 14. (★★)
Pour tout entier $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

et

$$v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
2. Démontrer que la suite (u_n) est monotone. En déduire qu'elle converge.
3. Démontrer que (v_n) est géométrique. En déduire la forme explicite de (u_n).
4. (Bonus) : déterminer la limite de la suite (u_n). *On pourra utiliser le fait que* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Exercice 15. (★★)
Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Étudier les variations de $g : x \mapsto \sqrt{2+x}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 < u_n < 2$.
3. Étudier le sens de variation de u.
4. Montrer que u converge et donner un encadrement de sa limite ℓ.
5. Déterminer ℓ.

Exercice 16. (★★)
On considère la suite u_n définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, u_n est bien défini et $u_n > 1$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
4. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 17. (★★)
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_0 = 2,\ v_0 = 12$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall \in \mathbb{N},\ w_n = v_n - u_n$ est géométrique. On précisera sa raison puis son terme général.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un même réel.

Exercice 18. (★★★)
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

Exercice 19. (★★)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 20. (★★★) Moyenne arithmético-géométrique

1. Démontrer que , pour tous réels a et b positifs,
$$2\sqrt{ab} \leq a + b$$
2. Soient a et b deux réels positifs. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par
$$u_0 = a, \quad \mathrm{v}_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n \mathrm{v}_n}, \quad \mathrm{v}_{n+1} = \frac{u_n + \mathrm{v}_n}{2}$$
   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, u_n est bien défini et que $0 \leq u_n \leq \mathrm{v}_n$.
   (b) En déduire la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (c) Établir que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.
   Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.
   (d) Calculer $M(a,a)$, $M(a,0)$, $M(0,b)$.
   (e) (**)Montrer que, pour tout réel $\lambda \geq 0$, $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$.

Exercice 21. (★★) - Il suffisait d'y penser !
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0;1]$ telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 1.

Exercice 22. (★★★) - Une équation où l'inconnue est une fonction
Le but de cet exercice et de déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f \circ f(x) = 6x - f(x). \quad (*)$$

Soit f une fonction qui vérifie la propriété ci-dessus et $x \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que (u_n) vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0.$$

2. En déduire qu'il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \geq 0$, $u_n = \lambda 2^n + \mu(-3)^n$.
3. Justifier pourquoi on a nécessairement $\mu = 0$ (on pensera que f doit être à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$).
4. Déterminer la valeur de λ puis de $f(x)$.
5. Vérifier que, réciproquement, la fonction ainsi trouvée vérifie bien la propriété $(*)$.

Exercice 23. (★★★) - Une autre du même type
Déterminer toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f \circ f(x) + f(x) = 2x.$$