Exercice 1.

$x = -2x + 7$

$\iff 3x = 7$

$\iff x = \frac{7}{3}$

On pose $V_n = u_n - \frac{7}{3}$

Montrons que (V_n) est géométrique de raison -2.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} = u_{n+1} - \frac{7}{3}$$
$$= -2u_n + 7 - \frac{7}{3}$$
$$= -2\left(V_n + \frac{7}{3}\right) + \frac{21}{3} - \frac{7}{3}$$
$$= -2V_n - \frac{14}{3} + \frac{14}{3}$$
$$= -2V_n.$$

Donc (V_n) est bien géométrique de raison -2.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times (-2)^n$ avec $V_0 = u_0 - \frac{3}{7} = \frac{11}{7}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{11}{7}(-2)^n$

et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{11}{7}(-2)^n + \frac{7}{3}}$$

Exercice 2 :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2u_{n+1} + 3$

$\iff 2u_{n+1} = u_n - 3$

$\iff u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2}$

$x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \iff \frac{1}{2}x = -\frac{3}{2}$

$\iff x = -3.$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = u_n + 3$.

Montrons que (V_n) est géométrique.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = u_{n+1} + 3$

$$= \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2} + 3$$
$$= \frac{1}{2}(V_n - 3) + \frac{3}{2}$$

car $u_n = V_n - 3$

$$= \frac{1}{2}V_n - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$$
$$= \frac{1}{2}V_n$$

Donc (V_n) est bien géométrique, de raison $\frac{1}{2}$.

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ avec $V_0 = u_0 + 3 = 2$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \times \frac{1}{2^n} = \boxed{\frac{1}{2^{n-1}}}$

Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = V_n - 3 = \boxed{\frac{1}{2^{n-1}} - 3}$

Exercice 4

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \frac{3}{2} u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$

On reconnaît une SRLO2. On résout son éq. carac :

$$x^2 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \iff 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 8 = 1 > 0$$

Il y a 2 racines réelles : $r_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ $r_2 = 1$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu \times 1^n$

$= \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu.$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On a : $\begin{cases} u_0 = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \mu \\ u_1 = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \mu \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 1 = \lambda + \mu & (E_1) \\ -1 = \frac{\lambda}{2} + \mu & (E_2) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2 = \frac{\lambda}{2} & (E_1 \leftarrow E_1 - E_2) \\ -3 = \mu & (E_2 \leftarrow 2E_2 - E_1) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda = 4 \\ \mu = -3 \end{cases}$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3$

$\iff \boxed{u_n = \frac{1}{2^{n-2}} - 3}$

Exercice 11

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - v_{n+1} = 3u_n + 2v_n - (2u_n + 3v_n)$$
$$= u_n - v_n$$

Donc $(u_n - v_n)$ est bien une suite constante.

De plus : $u_0 - v_0 = 1 - 2 = -1$.

Donc $(u_n - v_n)$ est une suite constante égale à -1.

2. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -1$

donc $v_n = u_n + 1$.

D'où : $u_{n+1} = 3u_n + 2v_n$
$$= 3u_n + 2(u_n + 1)$$
$$= 5u_n + 2.$$

Donc (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

3. $x = 5x + 2$

$\iff x = -\frac{1}{2}$

On pose $w_n = u_n + \frac{1}{2}$. Montrons que (w_n) est géométrique.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 5u_n + 2 + \frac{1}{2} = 5(w_n - \frac{1}{2}) + \frac{5}{2} = 5w_n$.

Donc (w_n) est géométrique de raison 5.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times 5^n$ avec $w_0 = u_0 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Donc $\boxed{u_n = w_n - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}}$ et $\boxed{v_n = u_n + 1 = \frac{3}{2} \times 5^n + \frac{1}{2}}$.

Exercice 12

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= -2x_{n+1} + y_{n+1} \\ &= -2x_{n+1} + 2x_n - 3y_n \\ &= -2x_{n+1} + 2x_n - 3(x_{n+1} + 2x_n) \\ &= -5x_{n+1} - 4x_n . \end{aligned}$$

$x_{n+1} = -2x_n + y_n$
$\Leftrightarrow y_n = x_{n+1} + 2x_n$

On a donc $x_{n+2} = -5x_{n+1} - 4x_n$.

Donc (x_n) est bien une SRL02.

2. On résout l'éq. carac. de (x_n) :

$$x^2 = -5x - 4 \iff x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$$

Donc il y a 2 racines réelles : $r_1 = -4$ et $r_2 = -1$.

Donc il existe 2 réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \lambda(-4)^n + \mu(-1)^n .$$

On a : $\begin{cases} x_0 = \lambda + \mu \\ x_1 = -4\lambda - \mu \end{cases}$

Or $x_0 = 2$ et $x_1 = -2x_0 + y_0 = -2\times 2 - 1 = -5$

Donc $\begin{cases} 2 = \lambda + \mu \\ -5 = -4\lambda - \mu \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = \lambda + \mu & (E_1) \\ 5 = 4\lambda + \mu & (E_2) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3 = 3\lambda & (E_1 \leftarrow E_2 - E_1) \\ 3 = 3\mu & (E_2 \leftarrow 4E_1 - E_2) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{cases}$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{x_n = (-4)^n + (-1)^n}$

et $y_n = x_{n+1} + 2x_n = (-4)^{n+1} + (-1)^{n+1} + 2(-4)^n + 2(-1)^n$

$= -4(-4)^n - (-1)^n + 2(-4)^n + 2(-1)^n$

$$\boxed{y_n = -2(-4)^n + (-1)^n}$$

Exercice 14

1. $u_{n+1} = \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}_{u_n}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

$$\boxed{u_{n+1} = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

2. $u_{n+1} - u_n = u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - u_n$

$$= u_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1\right)$$

or $\frac{\pi}{2^{n+1}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

donc $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 1$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$

Donc (u_n) est strictement décroissante.

De plus, $\forall k \in \{2, 3, \dots, n\}$, $\frac{\pi}{2^k} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

donc $\forall k \in \{2, 3, \dots, n\}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) > 0$

d'où $u_n > 0$.

(u_n) est décroissante et minorée donc elle converge.

3. Pour tout $n \geq 2$,

$V_{n+1} = u_{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ — on utilise la relation de récurrence de (u_n)

$= u_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ — $\sin a \cos a = \frac{\sin 2a}{2}$

$= u_n \times \frac{1}{2} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{2} u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

$= \frac{1}{2} V_n$

Donc (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Or $V_2 = u_2 \sin\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

Donc $\forall n \geq 2$, $V_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

D'où : $\forall n \geq 2$, $u_n = \frac{V_n}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$

$$\boxed{\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}}$$

4. $u_n = \dfrac{1}{\dfrac{\sin(\pi/2^n)}{\frac{1}{2^{n-1}}}} = \dfrac{1}{\dfrac{\sin(\pi/2^n)}{\frac{\pi}{2^n} \times \frac{2}{\pi}}} = \dfrac{2/\pi}{\dfrac{\sin(\pi/2^n)}{\pi/2^n}}$

Or $\dfrac{\sin(\pi/2^n)}{\pi/2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{2}{\pi}}$

Exercice 17

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$

$$= \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$= \frac{2(u_n + 2v_n) - 3(u_n + v_n)}{6}$$

$$= \frac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6}$$

$$= \frac{v_n - u_n}{6}$$

$$= \frac{1}{6} w_n.$$

Donc (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

Or $w_0 = v_0 - u_0 = 10$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 10\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$

$$= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}$$

$$= \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2} > 0$$

car $w_n = 10\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

Donc (u_n) est strictement croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - v_n$

$$= \frac{u_n - v_n}{3} = \frac{-w_n}{3} < 0$$

Donc (v_n) est strictement décroissante.

3. On a : • $(u_n) \nearrow$

• $(v_n) \searrow$

• $v_n - u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\left(\text{car } \lim\limits_{n \to +\infty} 10\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0\right)$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes, donc elles convergent vers la même limite réelle.