Chapitre 4

Suites réelles

Table des matières

1 Introduction

1.1 Notion de suite réelle et notations.

Définition 1. (Suite réelle)
On appelle suite réelle une application de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{R}$. Au lieu de $u(n)$, on utilisera la notation u_n.

Remarque.
La suite de terme général u_n se note :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$ si la suite est définie par à partir du rang 0.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geq 1}$si la suite est définie par à partir du rang 1.
- $(u_n)_{n\geq 2}$ si la suite est définie par à partir du rang 2.
- etc...

On peut aussi noter la suite (u_n) lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le rang à partir duquel elle est définie..

Attention ! NE **JAMAIS** CONFONDRE (u_n) et u_n ! ! ! ! !

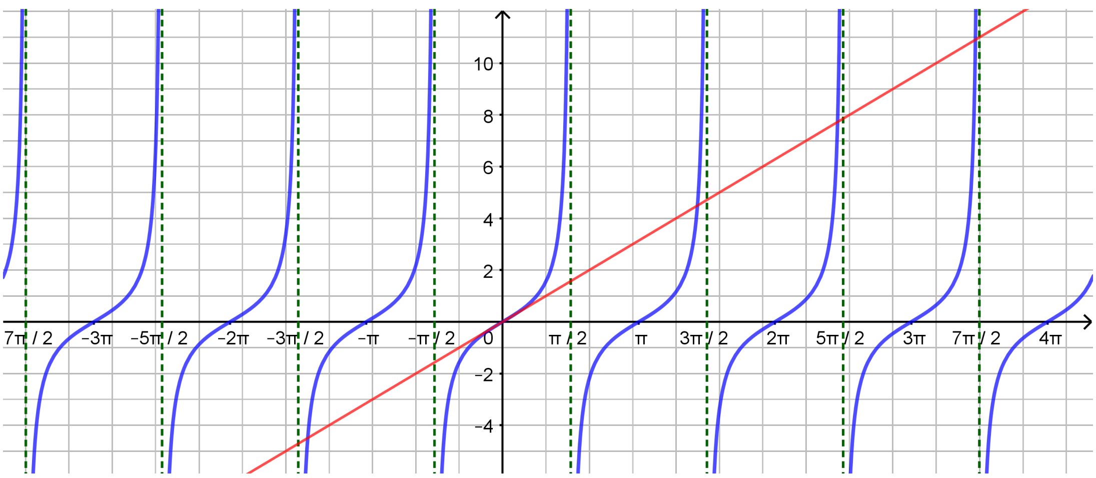
1.2 Modes de définition d'une suite réelle.

Il existe trois manière de définir une suite :

- De façon explicite.
- Par récurrence.
- De façon implicite.

Exercice de cours 1. Suite définie de manière implicite

1. Pour tout entier naturel n, montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$. On note cette solution u_n.
2. Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n\pi} = 1$.



1.3 Suites croissantes, décroissantes, minorées, majorées

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle définie à partir d'un rang n_0.

Définition 2. (Suite croissante, décroissante)
On dit que

- (u_n) est croissante ssi $\forall n \geq n_0,\ u_n \leq u_{n+1}$
- (u_n) est décroissante ssi $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq u_{n+1}$

Définition 3. (Suite majorée)
On dit que (u_n) est majorée si et seulement si :

il existe un réel M tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M$.

On dit alors que M est un majorant de la suite (u_n)..

Autrement dit : (u_n) est majorée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0,\ u_n \leq M$

Définition 4. (Suite minorée)
On dit que (u_n) est minorée si et seulement si :

il existe un réel m tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq m$.

On dit alors que m est un minorant de la suite (u_n)..

Autrement dit : (u_n) est minorée si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0,\ u_n \geq m$

Définition 5. (Suite bornée)

On dit que (u_n) est bornée si et seulement ssi elle est majorée et minorée

Autrement dit : (u_n) est bornée si et seulement si $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0,\ m \leq u_n \leq M$

Vous devez également retenir la caractérisation suivante des suites bornées :

Proposition 1. (Caractérisation des suites bornées)

(u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée.

Autrement dit : Une suite est bornée si et seulement si il existe un réel M tel que $\forall n \geq n_0,\ |u_n| \leq M$.

2 Familles de suites

2.1 Suites arithmétiques et géométriques

suites arithmétiques

Définition (formule de récurrence)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

r est alors appelé la *raison* de la suite.

Formule explicite

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_m + (n-m)r.$$

suites géométriques

Définition (formule de récurrence)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n.$$

q est alors appelé la *raison* de la suite.

Formule explicite

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_m q^{n-m}.$$

NB : Nous (re)verrons les formules de sommes dans le chapitre suivant.

2.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 6. (Suites arihmético-géométriques)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique si et seulement si il existe un couple de réels (a,b) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Méthode à retenir n° 1

Etude d'une suite arithmético-géométrique

On considère une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$.
On suppose que $a \neq 1$ (remarque : si $a = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique).

Voici comment obtenir l'expression de (u_n) en fonction de n :

1. Résoudre l'équation $x = ax + b$ et noter ℓ sa solution. (On peut retenir que $\ell = \dfrac{b}{1-a}$).
2. Définir une suite auxiliaire en posant : $\forall n \geq n_0,\ v_n = u_n - \ell$.
3. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.
   Cette démonstration se fait toujours sur le schéma suivant :
   $$\forall n \geq n_0, \quad v_{n+1} = au_n + b - \ell = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n - a\frac{b}{1-a} = av_n.$$
4. Donner l'expression de (v_n) et en déduire celle de (u_n) en sachant que $u_n = v_n + \ell$.
   On peut retenir le résultat général :
   $$u_n = v_{n_0}a^{n-n_0} + \ell = (u_{n_0} - \ell)a^{n-n_0} + \ell.$$

On a démontré au passage la proposition suivante :

Proposition 2. (limite d'une suite arithmético-géométrique)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de la forme $u_{n+1} = au_n + b$.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge si et seulement si } |a| < 1 \text{ et sa limite est } \ell = \frac{b}{1-a}.$$

Exercice de cours 2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 3$.
Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice de cours 3.
Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$.
Exprimer u_n en fonction de a, b et n.

2.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 7. (Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 et équation caractéristique)
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 si et seulement si il existe un couple de réels (a,b) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle alors **équation caractéristique de la suite** l'équation $x^2 = ax + b$.

Proposition 3. (Formule explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
On note Δ le discriminant de son équation caractéristique $x^2 = ax + b$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique a deux solutions réelles r_1 et r_2 et :

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \text{ avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ déterminés par } u_0 \text{ et } u_1.$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a une unique solution r et :

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n \text{ avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ déterminés par } u_0 \text{ et } u_1.$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées α et $\overline{\alpha}$ et :

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \lambda \mathrm{Re}\,(\alpha^n) + \mu \mathrm{Im}\,(\alpha^n) \text{ avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ déterminés par } u_0 \text{ et } u_1.$$

Remarque. Dans le cas $\Delta < 0$, on voit qu'il faudra calculer α^n, ce qui ne sera possible en pratique qu'en mettant α sous **forme exponentielle** (voir l'exemple ci-dessous).

Exercice de cours 4.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
   Déterminer la formule explicite de u.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 1,\ v_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2v_{n+1} - 2v_n$.
   Déterminer la formule explicite de v.

3. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_0 = 1,\ w_1 = 12$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = 4(w_{n+1} - w_n)$.
   Déterminer la formule explicite de w.

3 Convergence des suites réelles

3.1 Définition et premières propriétés

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle définie à partir d'un rang n_0.

Définition 8. (Suite Convergente, limite d'une suite)

On dit que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ssi

tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

On dit alors que (u_n) est convergente. Sinon, on dit qu'elle est divergente.

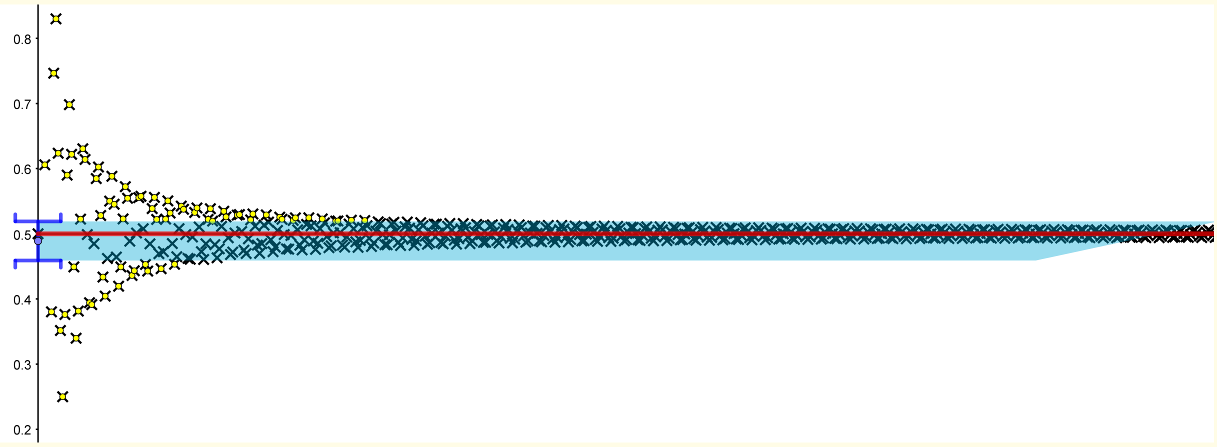
Exemple 1. On a représenté ci-dessous la suite $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \frac{3\sin(n)}{n+1}.$$

On peut prouver que cette suite converge vers 1. La figure ci-dessous montre un intervalle ouvert qui contient 1.

Cet intervalle contient donc tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux (les points jaunes).

Vous pouvez accéder à cette animation et modifier l'intervalle en cliquant ici.



Proposition 4. (Caractérisation n° 1 des suites convergentes)

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.

Proposition 5. (Caractérisation n° 2 des suites convergentes)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang.

Remarque. On peut écrire la caractérisation n° 2 sous forme quantifiée :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n = l &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon\end{aligned}$$

Attention ! En général, on n'utilise pas la définition pour calculer une limite !

Exercice de cours 5.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 1. Montrer que cette suite est positive à partir d'un certain rang.

Exercice de cours 6.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un réel $\ell \neq 0$.
Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \neq 0$.

Théorème 6. (Unicité de la limite)

Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Proposition 7. (Les suites convergentes sont bornées)

Toute suite convergente est bornée.

Attention ! Une suite bornée n'est pas forcément convergente !
Par exemple, la suite définie par $u_n = (-1)^n$ est est bornée (comprise entre -1 et 1) et divergente.

3.2 Opérations sur les suites convergentes

Tous les résultats de cette section sont déjà connus pour avoir été vus et largement utilisés au lycée : ce sont les propriétés que vous utilisez, sans forcément en avoir conscience, quand vous calculez des limites.

Proposition 8. (Opérations sur les limites des suites convergentes)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites ℓ' et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$
2. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\ell$
3. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et (v_n) est majorée, alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
4. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\ell'$
5. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \neq 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$

3.3 Ordre et convergence

Proposition 9. (Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.)
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'.

- Si il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$ alors on a $\ell \leq \ell'$.
- Si il existe un entier N tel que pour tout $n < N$, $u_n < v_n$ alors on a $\ell \leq \ell'$.

Attention ! En passant à la limite, **les inégalités strictes deviennent des inégalités larges**.

Par exemple $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{2}{n+1}$ mais ces deux suites convergents vers la même limite.

Proposition 10. (Théorème d'encadrement)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

Remarque. Vous connaissez sans doute le théorème ci-dessus sous le nom de théorème des gendarmes. Mais cette appellation est **à proscrire**.

Proposition 11. (Théorème de la limite monotone)

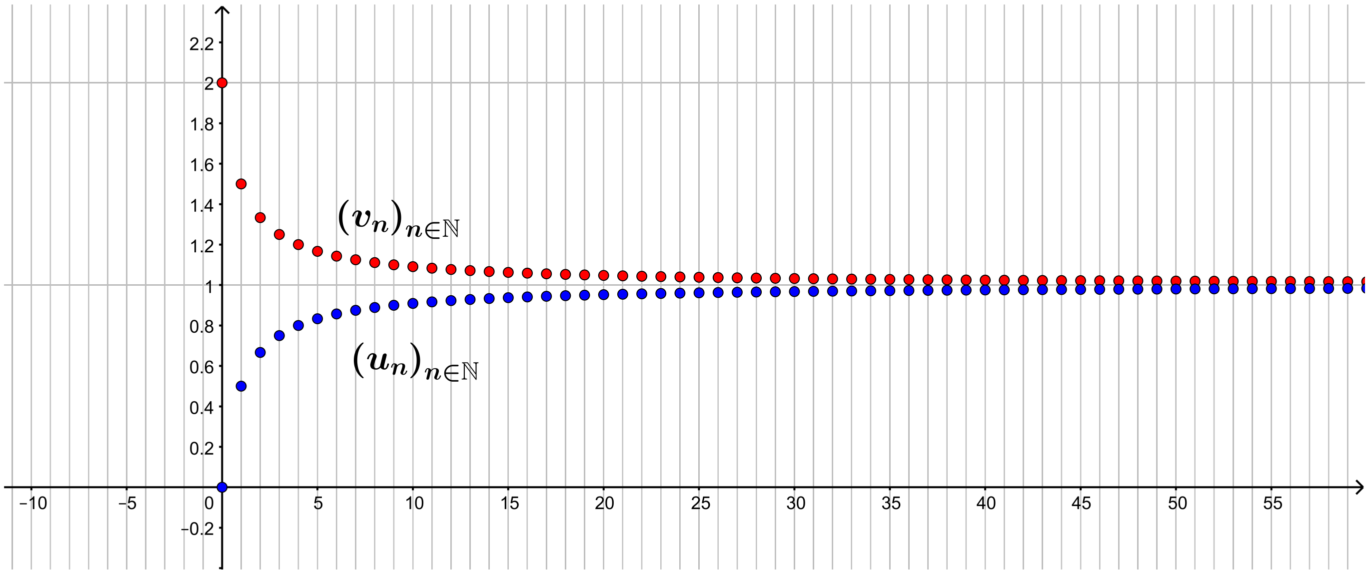
Toute suite majorée croissante est convergente.
Toute suite minorée décroissante est convergente.

3.4 Suites adjacentes

Définition 9. (Suites adjacentes)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On dit qu'elles sont adjacentes si :

- l'une est croissante
- l'autre décroissante
- $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Exemple 2. Les suites définies par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$ sont adjacentes.



Exercice de cours 7. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies ci-dessous sont adjacentes.

$$\forall \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

Proposition 12. (Convergence des suites adjacentes)

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

4 Suites divergeant vers l'infini

Attention ! Une suite divergente est une suite non convergente. elle peut donc soit tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$, **soit n'avoir pas de limite**.

Définition 10. (Suite divergeant vers l'infini)
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si :

Tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si :

Tout intervalle de la forme $]-\infty, A$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Autrement dit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > A$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n < A$$

Proposition 13. (Limites par comparaison)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq v_n$.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Proposition 14. (Opérations sur les limites)

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel strictement positif, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$
4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$

5 Tableau de synthèse des opérations sur les limites

		$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell' \neq 0$	$u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
	$u_n \times v_n$	$\ell\ell'$	0	$\text{signe}(\ell')\infty$	$-\text{signe}(\ell')\infty$
	$\dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\text{signe}(\ell')\infty$	$-\text{signe}(\ell')\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	$u_n + v_n$	ℓ	0	$+\infty$	$-\infty$
	$u_n \times v_n$	0	0	F.I	F.I
	$\dfrac{u_n}{v_n}$	$\text{signe}(\ell)\infty$	F.I	F.I	F.I
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$u_n + v_n$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I
	$u_n \times v_n$	$\text{signe}(\ell)\infty$	F.I	$+\infty$	$-\infty$
	$\dfrac{u_n}{v_n}$	0	0	F.I	F.I
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	$u_n + v_n$	$-\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$
	$u_n \times v_n$	$-\text{signe}(\ell)\infty$	F.I	$-\infty$	$+\infty$
	$\dfrac{u_n}{v_n}$	0	0	F.I	F.I

6 Croissances comparées

Proposition 15. (Croissances comparées de $n!,\ q^n,\ n^\alpha$ et $(\ln n)^\beta$)
Soient α et β deux réels strictement positifs et q un réel tel que $|q| < 1$ ou $q > 1$.

1. Si $q > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^\alpha} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{q^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{(\ln n)^\beta} = +\infty$

2. Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n^\alpha} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{(\ln n)^\beta} = +\infty$

3. Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n^\alpha} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{(\ln n)^\beta} = 0$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{(\ln n)^\beta} = +\infty$

On peut résumer ainsi :

$n!$ l'emporte toujours sur q^n qui l'emporte sur n^α qui l'emporte sur $(\ln(n))^\beta$