FE04 - Quelques corrigés supplémentaires

Correction exercice 13

1. On pose $\mathcal{P}(n)$: « u_n est définie et $u_n > 0$ ».
Initialisation : u_0 et u_1 sont bien définies et valent respectivement 1 et 2 donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
$u_n u_{n+1} > 0$, par hypothèse de récurrence, donc $\sqrt{u_n u_{n+1}}$ existe bien et est strictement positif, donc u_{n+2} est bien définie et $u_{n+2} > 0$. $\mathcal{P}(n+2)$ est donc vraie.
Donc, par récurrence, pour tout entier n on a $0 \leq u_n \leq 2$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln\left(\sqrt{u_n u_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\ln(u_n u_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\ln u_n + \ln u_{n+1}\right) &= \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}\ln u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}v_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

(b) L'équation caractéristique de la suite (v_n) est $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ce qui équivaut à $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$
$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$.
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{-1}{2} \text{ et } r_2 = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Il existe donc deux réels λ et μ tels que :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu \times 1^n. \\ \iff &\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu. \end{aligned}$$

Pour $n = 0$ et $n1$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{rcl} v_0 &=& \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \mu \\ v_1 &=& \lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \mu \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{rcl} \ln(u_0) &=& \lambda + \mu \\ \ln(u_1) &=& -\frac{1}{2}\lambda + \mu \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& \lambda + \mu \\ \ln(2) &=& -\frac{1}{2}\lambda + \mu \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{rcl} \mu &=& -\lambda \\ \ln(2) &=& -\frac{1}{2}\lambda - \lambda \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{rcl} \mu &=& -\lambda \\ \ln(2) &=& -\frac{3}{2}\lambda \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{rcl} \mu &=& -\lambda \\ -\frac{2}{3}\ln(2) &=& \lambda \end{array}\right. \\ \iff &\left\{\begin{array}{rcl} \mu &=& \frac{2}{3}\ln(2) \\ \lambda &=& -\frac{2}{3}\ln(2) \end{array}\right. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = -\frac{2}{3}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\ln(2) = \frac{2}{3}\ln(2)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

et

$$u_n = e^{v_n} = \boxed{e^{\frac{2}{3}\ln(2)\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}}.$$

Correction exercice 22

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} = f(u_{n+1}) = f(f(u_n)) = f \circ f(u_n) &= 6u_n - f(u_n) \quad \text{D'après la relation } (*) \\ &= \boxed{6u_n - u_{n+1}} \end{aligned}$$

2. On reconnaît en (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Je passe les calculs, vous savez déterminer l'expression de (u_n) (sinon il faut vous entrainer ! !).

3. On sait que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Or pour tout $n \geq 1$, $u_n = f(u_{n-1})$ donc on a $u_n > 0$ pour $n \geq 1$.
Supposons par l'absurde que $\mu \neq 0$.
On a $u_n = \mu(-3)^n \left(\frac{\lambda \times 2^n}{\mu(-3)^n} + 1\right) = \mu(-3)^n \left(\frac{\lambda}{\mu} \times \left(\frac{-2}{3}\right)^n + 1\right)$.
On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{-2}{2}\right)^n + 1 = 1$.
Donc il existe un rang N à partir duquel $\left(\frac{-2}{2}\right)^n + 1 > 0$.
Si $\mu < 0$ on considère un entier $n \geq N$ pair et si $\mu > 0$, on considère un entier $n \geq N$ impair.
Dans les deux cas, on a $\mu(-3)^n < 0$ et $\left(\frac{-2}{3}\right)^n + 1 > 0$ et donc $u_n < 0$ ce qui est absurde.
Donc $\mu = 0$.

4. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \times 2^n$.
Donc $u_0 = \lambda \times 2^0$.
Ce qui équivaut à $x = \lambda$.
D'où
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x \times 2^n.$$
On a donc :
$$f(x) = f(u_0) = u_1 = x \times 2^1 = 2x.$$
D'où :
$$\boxed{f(x) = 2x}$$
.

5. On vérifie enfin que :
$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(2x) = 2 \times 2x = 4x$.
et que :
$6x - f(x) = 6x - 2x = 4x$.
On a donc bien, pour tout réel x (puisqu'on a choisit un x quelconque) $f \circ f(x) = 6x - f(x)$.