Feuille d'exercices n° 5 - Sommes et produits

Exercice 1. **(☆)** (*Voir la correction ici*) Calculer les sommes suivantes :

1. $S = \sum_{k=1}^{10} k$
2. $s = \sum_{k=1}^{10} k^2$
3. $A = \sum_{k=3}^{10} k$
4. $a = \sum_{k=3}^{10} k^2$
5. $B = \sum_{k=1}^{n+1} k$
6. $b = \sum_{k=1}^{n+1} k^2$
7. $C = \sum_{k=1}^{n-1} k$
8. $c = \sum_{k=1}^{n-1} k^2$
9. $D = \sum_{k=5}^{n+2} k$
10. $E = \sum_{k=n}^{2n} k$

Exercice 2. **(☆)** (*Voir la correction ici*) Calculer les sommes suivantes :

1. $a = \sum_{k=0}^{10} 2^k$
2. $A = \sum_{k=4}^{n} 3^k$
3. $A' = \sum_{k=0}^{n} (-4)^k$
4. $A' = \sum_{k=0}^{2n} 3^k$
5. $D = \sum_{k=n}^{2n} 3^k$
6. $B = \sum_{k=0}^{n} 5^{2k}$
7. $C = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k}$

Exercice 3. **(☆)** (*Voir la correction ici*)
Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes

1. $3^4 + 3^5 + 3^6 + \ldots + 3^{15}$
2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots + \frac{10}{1024}$
3. $u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \ldots + \frac{u^n}{n}$
4. $2 - 4 - 6 - 8 + \ldots + 50$

Exercice 4. **(★)**
Calculer les sommes suivantes, où n et m sont des entiers donnés :

1. $A = \sum_{k=1}^{10} 1 - 5k + 3k^2$
2. $B = \sum_{k=1}^{10} 2^k - 6 + 2k$
3. $C = \sum_{i=1}^{n} 4i + i^2 - 2$
4. $S = \sum_{i=2}^{n} 3i - 2$
5. $T = \sum_{k=n}^{2n} k(1-k)$
6. (★★) $U = \sum_{j=1}^{m} 2^{j+1}$
7. (★★) $V = \sum_{j=1}^{m} 3^{1-2k}$
8. (★★) $W = \sum_{\ell=0}^{n} e^{\ell+1}$

Indications : *Pour T : développer $k(k-1)$. Pour U : $2^{j+1} = 2^j \times 2$.*

Exercice 5. **Quelques sommes pour s'entrainer...** (*Voir la correction ici*)
Calculer les sommes suivantes

1. $\sum_{k=5}^{11} k$
2. $\sum_{k=9}^{125} k$
3. $\sum_{k=5}^{11} x$
4. $\sum_{k=5}^{11} (3+5k)$
5. $\sum_{k=5}^{11} \frac{2^k}{3}$
6. $\sum_{k=3}^{125} \frac{48}{2^k}$
7. $\sum_{k=5}^{11} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}$
8. $\sum_{k=5}^{11} \frac{3^k}{2^{2k}}$
9. $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$
10. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$
11. $\sum_{k=1}^{n} 5^{2k}$
12. $\sum_{k=823}^{2012} 7$
13. $\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1)$
14. $\sum_{k=0}^{n} (2^k + k^2 + 2)$
15. $\sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 4k + 1)$
16. $\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{4^k}$
17. $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}}$
18. $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{(2x)^{2k}}$
19. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-1}{k+1}$
20. $\sum_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k-1}$

Indication pour le 18 : voir l'exercice **??**.
Indication pour le 19 : écrire le 1 comme $k+3-(k+2)$.

Exercice 6. (★)
Corriger les erreurs dans la correction de l'exercice suivant.
Énoncé : Calculer les sommes suivantes :

1. Soit $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k$.
2. Soit $n \geq 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 5^k$.
3. Soit $n \geq 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}$.

Correction

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{3^n-1}{2}$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 5^k = \frac{1-5^{2n}}{1-5} = \frac{5^{2n}-1}{4}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4^k} = \frac{1}{\frac{1-4^n}{1-4}} = \frac{3}{4^n-1}$

Exercice 7. (★) Nouvelle preuve de la somme des k et des k^3
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S = \sum\limits_{k=0}^{n} k$.

1. En effectuant le changement d'indice $k' = n-k$, démontrer que $S = n(n+1) - S$.
2. Retrouver alors la valeur de S.
3. Reprendre la même démarche pour retrouver $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$. La démarche fonctionne-t-elle pour $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$?

Exercice 8. (★) Nouvelle preuve de la somme des k^2
On note $S = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2$. Calculer de deux manières la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3$ et en déduire S.
On a donc démontré d'une autre manière la formule déjà démontrée à l'exercice **??**

Exercice 9. (★)
Reprendre la méthode de l'exercice précédent pour retrouver la formule de $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3$

Exercice 10. Des sommes télescopiques
Calculer les sommes suivantes :

1. (★) $A = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+k)^2} - \frac{1}{k^2}$
2. (★) $B = \sum\limits_{k=0}^{n+1} e^k - e^{k-1}$
3. (★) $C = \sum\limits_{k=2}^{3n} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{3}\right)$
4. (★★) $D = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}$ (Ecricome 2013)
5. (★★★) $E = \sum\limits_{k=p}^{n} \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$

Exercice 11. (★★) Des télescopages cachés
Calculer les sommes suivantes à l'aide d'un télescopage que vous ferrez apparaître.

1. $A = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$
2. $B = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$
3. $C = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Exercice 12. **(★) Manipulation de factorielles** (*Voir la correction ici*)
Simplifier les expressions suivantes :

1. $(n+1)! - n!$
2. $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$
3. $\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$
4. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ où $u_n = \dfrac{a^n}{n! b^{2n}}$

Exercice 13. **(★★)** (*Voir la correction ici*)
Soit $n \geq 1$. On pose

$$q = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}.$$

Les deux questions peuvent être traitée de manière indépendante.

1. Écrire q à l'aide du symbole $\prod$.
2. Écrire q à l'aide de factorielles.

Exercice 14. **(★)** (*Voir la correction ici*) Soit $n \geq 1$ et $x \in]0, 2\pi[$. Calculez les sommes suivantes :

1. (☆) $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k$
2. (★) $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k}$
3. (★) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
4. (★★) $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cos x$ (pensez que $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$...)
5. (★★) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}$
6. (★★) $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 2^k$
7. (★★★) $\sum\limits_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-2} 3^k$
8. (★★★) $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k$ (pensez au comité-président...)

Exercice 15. **(★★) Divergence de la série harmonique**
On note, pour tout entier $n > 0$:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
Quels sont alors les comportements asymptotiques possibles pour la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$
3. En déduire, en raisonnant par l'absurde, que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 16. **Encadrement d'une somme**
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{\sqrt{n+n^2}} \leq S_n \leq \frac{n+1}{n}$.
2. En déduire la limite de (S_n).

Exercice 17. **(★★★) Convergence de la série harmonique alternée** On note, pour tout entier $n > 0$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

1. Démontrer que les suites extraites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Conclure.

1 Solutions

Exercice 1 - Correction. (*retour à l'exercice 1*)

1. $S = \sum_{k=1}^{10} k = 55$
2. $s = \sum_{k=1}^{10} k^2 = 385$
3. $A = \sum_{k=3}^{10} k = 52$
4. $a = \sum_{k=3}^{10} k^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{3} k^2 = 385 - (1+4+9) = 371$
5. $B = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
6. $b = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
7. $C = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$
8. $c = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$
9. $D = \sum_{k=5}^{n+2} k = \sum_{k=1}^{n+2} k - \sum_{k=1}^{4} k = \frac{(n+2)(n+3)}{2} - \frac{4\times 5}{2} = \frac{n^2+5n-14}{2} = \frac{(n-2)(n+7)}{2}$
   On obtient la dernière factorisation en calculant les racines du trinôme $x^2+5x-14$.
10. $E = \sum_{k=n}^{2n} k = \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{3n^2+3n}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$

Exercice 2 - Correction. (*retour à l'exercice 2*)

1. $a = \sum_{k=0}^{10} 2^k = \dfrac{1-2^{11}}{1-2} = \boxed{2^{11}-1}$
2. $A = \sum_{k=4}^{n} 3^k = \dfrac{3^4-3^{n+1}}{1-3} = \dfrac{3^{n+1}-3^4}{3-1} = \dfrac{3^{n+1}-3^4}{2}\boxed{\dfrac{3^{n+1}-3^4}{2}}$
3. $A' = \sum_{k=0}^{n} (-4)^k = \dfrac{1-(-4)^{n+1}}{1-(-4)} = \boxed{\dfrac{1-(-4)^{n+1}}{5}}$
4. $A' = \sum_{k=0}^{2n} 3^k = \dfrac{1-3^{2n+1}}{1-3} = \dfrac{3^{2n+1}-1}{3-1} = \boxed{\dfrac{3^{2n+1}-1}{2}}$
5. $D = \sum_{k=n}^{2n} 3^k = \dfrac{3^n-3^{2n+1}}{1-3} = \dfrac{3^{2n+1}-3^n}{2} = \boxed{\dfrac{3^n(3^{n+1}-1)}{2}}$

6. $B = \sum_{k=0}^{n} 5^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (5^2)^k = \sum_{k=0}^{n} 25^k = \frac{1-25^{n+1}}{1-25} = \boxed{\frac{25^{n+1}-1}{24}}$

7. $C = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) =$
$\boxed{\frac{1}{2^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}$

Exercice 3 - Correction. (*retour à l'exercice 3*)
Écrire à l'aide du symbole $\sum$ les expressions suivantes

1. $3^4+3^5+3^6+\ldots+3^15$
$= \sum_{k=4}^{15} 3^k$
2. $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{10}{1024}$
$= \sum_{k=1}^{10} \frac{k}{2^k}$
3. $u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots+\frac{u^n}{n}$
$= \sum_{k=1}^{n} \frac{u^k}{k}$
4. $2-4+6-8+\ldots+50$
$= \sum_{k=1}^{25} (-1)^k 2k$

Exercice 5 - Correction. (*retour à l'exercice 5*)

1. $\sum_{k=5}^{11} k$

Première méthode : $\sum_{k=5}^{11} k = \sum_{k=1}^{11} k - \sum_{k=1}^{4} k = \frac{11\times 12}{2} - \frac{4\times 5}{2} = 56$

Deuxième méthode : $2\sum_{k=5}^{11} k = \sum_{k=5}^{11} k + \sum_{\ell=5}^{11} 16-\ell$ (on fait le changement d'indice $\ell = 16-k$). Ainsi $2\sum_{k=5}^{11} k = \sum_{k=5}^{11} 16 = 7\times 16$. On en déduit que $\sum_{k=5}^{11} k = 7\times 8 = 56$

2. $\sum_{k=9}^{125} k$

De la même manière, on obtient $\sum_{k=9}^{125} k = \frac{125\times 126}{2} - \frac{8\times 9}{2}$

3. $\sum_{i=5}^{11} x$

Comme la somme est sur k, on peut sortir x et on obtient $\sum_{i=5}^{11} x = 7x$

4. $\sum_{k=5}^{11} (3+5k)$

On découpe la somme en deux : $\sum_{k=5}^{11} (3+5k) = \sum_{k=5}^{11} 3 + \sum_{k=5}^{11} 5k = 3\times 7 + 5\times \sum_{k=5}^{11} k = 21 + 5\times 56 = 301$

5. $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{2^k}{3}$

$$\sum_{k=5}^{11} \frac{2^k}{3} = \frac{1}{3}\sum_{k=5}^{11} 2^k = \frac{1}{3} \times \frac{2^5 - 2^{12}}{1-2} = \frac{4064}{3}$$

6. $\displaystyle\sum_{k=3}^{125} \frac{48}{2^k}$

$$\sum_{k=3}^{125} \frac{48}{2^k} = 48\sum_{k=3}^{125} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 48 \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{126}}{1-\frac{1}{2}} = 96\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{126}\right)$$

7. $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}}$

$$\sum_{k=5}^{11} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} = \sum_{k=5}^{11} \frac{2\times 3 \times 2^k}{3^k} = 6\sum_{k=5}^{11}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 6 \times \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5 - \left(\frac{2}{3}\right)^{12}}{1-\frac{2}{3}}$$

8. $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{3^k}{2^{2k}}$ $\displaystyle\sum_{k=5}^{11} \frac{3^k}{2^{2k}} = \sum_{k=5}^{11} \frac{3^k}{4^k} = \sum_{k=5}^{11}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^5 - \left(\frac{3}{4}\right)^{12}}{1-\frac{3}{4}}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) + n = n(n+2)$$

10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \frac{-1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^{2k}$

$$\sum_{k=1}^{n} 5^{2k} = \sum_{k=1}^{n} 25^k = \frac{(25-(25)^{n+1}}{1-25}$$

12. $\displaystyle\sum_{k=823}^{2012} 7$

$$\sum_{k=823}^{2012} 7 = 7 \times (2012 - 823 + 1) = 8330$$

13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1)$

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k^3 - \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$$

14. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2^k + k^2 + 2)$

$$\sum_{k=0}^{n} (2^k + k^2 + 2) = \sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} 2 = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2(n+1)$$

15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (6k^2 + 4k + 1)$

$$\sum_{k=1}^{n} (6k^2+4k+1) = 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n = n((n+1)(2n+3)+1)$$

16. $\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{4^k}$
$\sum_{k=1}^{9} \frac{1}{4^k} = \sum_{k=1}^{9} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1-\frac{1}{4}} = 3(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^9)$

17. $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}}$
$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \times \frac{\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

18. $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$

19. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$
$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+3-(k+2)}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}$ (télescopage)

20. $\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{2k+3}{2k+1}\right)$
$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{2k+3}{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(2k+3) - \ln(2k+1) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k$ où $u_k = \ln(2k+1)$. On a donc un télescopage.
$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{2k+3}{2k+1}\right) = \ln(2n+3) - \ln(1) = \ln(2n+3)$

Exercice 12 - Correction. (*retour à l'exercice 12*)

1. $(n+1)! - n!$
$(n+1)! - n! = (n+1)n! - n! = n \times n!$

2. $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$
$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2)$

3. $\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$
$\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n+2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$

4. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ où $u_n = \frac{a^n}{n!b^{2n}}$
$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!b^{2(n+1)}} \times \frac{n!b^{2n}}{a^n} = \frac{a}{(n+1)b^2}$

Exercice 13 - Correction. (*retour à l'exercice 13*)

1. On a :
$$q = \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}.$$
On peut aussi écrire :
$$q = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{2n}{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

2.
$$\begin{aligned}
q &= \frac{(2\times 1)\times(2\times 2)\times(2\times 3)\times\cdots\times(2\times n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} \\
&= \frac{\overbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}^{n \text{ facteurs}}\times\overbrace{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}^{n!}}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} \\
&= \frac{2^n\times n!}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)} \\
&= \frac{2^n n!\times 2\times 4\times\cdots\times 2n}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)\times 2\times 4\times\cdots\times 2n} \\
&= \frac{2^n n!\times\overbrace{2\times 4\times\cdots\times 2n}^{\text{déjà calculé plus haut}}}{2\times 3\times 4\times 5\times\cdots\times 2n\times(2n+1)} \\
&= \frac{2^n n!\times 2^n n!}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(2^n)^2\,(n!)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

Exercice 14 - Correction. (*retour à l'exercice 14*)

1. $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k}$

   $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k} - 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1$

2. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}$

   $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}}{3^k} = \frac{\left(\frac{1}{3}-1\right)^n}{3}$

3. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

   $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$

4. $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}2^k$

   On pose $j = k-1$, on obtient $\sum\limits_{j=0}^{n-2}\binom{n-1}{j}2^{j+1} = 2\left(\sum\limits_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}2^j - 2^{n-1}\right) = 2(3^{n-1} - 2^{n-1})$