Chapitre 5

Calcul de sommes et de produits

Table des matières

1 Sommes

1.1 Définition et sommes de référence

1.1.1 Définition et premiers calculs

Définition 1. (Symbole "Sigma")
Soit $p, n \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ et $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n \in \mathbb{C}$.

....

Exemple 1.
La somme $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{14}$ peut s'écrire ....

Remarque. L'indice k est une variable muette, il n'a aucun sens en dehors de la somme ! À la place de k on peut très bien mettre j, ℓ ou bob :

....

Remarque. Si p>n, la somme est vide et vaut alors 0 :

$$\sum_{k=3}^{2} u_k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

1.1.2 Sommes de référence

1.1.2.1 Sommes constantes

Proposition 1. (Sommes de uns, sommes constantes)
Si p et n sont deux entiers tels que $p \leq n$ et a une constante :

$$\sum_{k=p}^{n} 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} a = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 2.

$$\sum_{k=1}^{10} 1 = \ldots\ldots \quad , \sum_{k=1995}^{2020} 12 = \ldots\ldots \quad , \sum_{k=2}^{n} 3 = \ldots\ldots \quad , \sum_{k=0}^{n} n = \ldots\ldots$$

Attention ! Dans la somme $\sum_{k=p}^{n} u_k$, il y a $n-p+1$ termes et pas $n-p$!

1.1.2.2 Sommes des entiers et somme des carrés

Proposition 2. (Sommes des entiers et somme des carrés)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Exemple 3. Calculons les sommes suivantes :

1. $S = \sum_{k=1}^{20} k$
2. $s = \sum_{k=0}^{20} k^2$
3. $A = \sum_{k=5}^{20} k$
4. $a = \sum_{k=5}^{20} k^2$
5. $B = \sum_{k=1}^{n+1} k$
6. $b = \sum_{k=1}^{n+1} k^2$

1.1.2.3 Sommes géométriques

Proposition 3. (sommes géométriques)
Si q est un complexe **différent de** 1, on a, pour $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque. Si $q = 1$, on est ramené à une somme de 1.

Attention ! $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k \neq \sum_{k=0}^{n} q^k$.

Remarque. Si $0 < p \leq n$, on retrouve facilement $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k$ comme suit :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 4. Calculons les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} 2^k$ 2. $\displaystyle\sum_{k=10}^{20} 3^k$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 4^k$ 4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} 5^k$ 5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 6^{-k}$ 6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 7^{2k}$ 7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{8^k}$

Corollaire 4. (Factorisation de x^n et $a^n - b^n$)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $x \neq 1$:

$$x^n - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour tout réels a et b tels que $a \neq b$:

$$a^n - b^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 5.

$x^3 - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a^3 - b^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x^4 - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a^5 - b^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x^5 - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

1.2 Propriétés du symbole $\sum$

1.2.1 Linéarité et relation de Chasles

On retrouver ici des propriétés similaires à celles vues pour les intégrales.

Proposition 5. (Linéarité)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes et λ un complexe. On a :

$$\sum_{k=p}^{n} \lambda u_k = \dots\dots\dots\dots \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} u_k + v_k = \dots\dots\dots\dots$$

Exemple 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(1+k+k^2+2^k), \quad T_n = \sum_{k=0}^{n}(4k+1), \quad U_n = \sum_{k=1}^{n-1}(4\cdot 3^k + 5k - 2), \quad V_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{3^k} + 1$$

Proposition 6. (Découpage d'une somme (relation de Chasles))
Si $p \leq m \leq n$. On a :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \dots\dots\dots\dots$$

1.2.2 Changement d'indice

Exemple 7.
On pose $S = a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{20}$. Compléter les trous :

$$A = \sum_{k=\dots\dots}^{\dots\dots} a_k = \sum_{k=0}^{\dots\dots} a_{\dots\dots} = \sum_{k=\dots\dots}^{\dots\dots} a_{k+2} = \sum_{k=\dots\dots}^{\dots\dots} a_{k-2} = \sum_{k=\dots\dots}^{\dots\dots} a_{20-k}.$$

Exemple 8.
Réécrivons les sommes ci-dessous en effectuant les changements d'indice proposés.

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k+2}{k-1} u_{k-2}$; poser $j = k-2$.
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^n u_k$; poser $i = k+1$.
3. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2} (-1)^k u_{k-3}$; poser $\ell = k-3$.
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$; poser $\ell = k+1$.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k$; poser $j = k-1$.
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n} k^2$; poser $j = k+1$.

Exemple 9.
Réécrivons les sommes ci-dessous en effectuant les changements d'indice proposés.

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n-k)u_k$; poser $k' = n-k$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)u_{n+1-k}$; poser $k' = n+1-k$.
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$; poser "$k = n-k$" (changement d'indice "direct").
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \frac{1}{n+1-i}$; poser $j =$ ....
5. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n-1}\ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$; poser $k' = 2n-k$.

1.2.3 Sommes télescopiques

Proposition 7. (Sommes télescopiques)
On a les égalités suivantes :

- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_{k+1} - u_k =$ ....
- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k - u_{k+1} =$ ....
- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k - u_{k-1} =$ ....
- $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_{k-1} - u_k =$ ....

Remarque. On peut retenir les deux principes suivants :

- On a une somme télescopique quand on a une somme "d'une expression moins la même expression au rang $k+1$ ou $k-1$".
- La valeur d'une somme télescopique se trouve en "remplaçant k par la petite borne dans le petit indice par la grande borne dans le grand indice".

Exemple 10.

1. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

2 Produits

On présente ici simplement le symbole Pi qui est utilisé pour calculer des produits. Nous n'écrirons pas de proposition sur le sujet car dès qu'on doit le manipuler, le mieux est de le "développer".

Définition 2. (Symbole "Pi")
Soit $p, n \in \mathbb{N}$, $p \leq n$ et $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n \in \mathbb{C}$.

....

Remarque. Si p>n, le produit est vide et vaut alors 1 :

$$\prod_{k=3}^{2} u_k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Exemple 11. Développons et simplifions si possible les produits suivants

1. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} 3$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)$
3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$
4. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} q^k$
5. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} q^{2^k}$
6. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$
7. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{3k+2}{3k+5}$
8. $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

3 Formule du binôme de Newton

3.1 Intervalles d'entiers

Définition 3. (Intervalle d'entiers)
Si p et n sont deux entiers avec $p \leq n$, l'ensemble des entiers de p à n se note $[\![p\ ;\ n]\!]$.

Exemple 12.

- $[\![1, 4]\!] =$ ....
- $[\![0, 7]\!] =$ ....

Attention ! Ne pas confondre !!! $[\![p, n]\!] \neq [p, n]$.

3.2 Factorielle

Définition 4. (Factorielle d'un entier)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on appelle *factorielle de* n l'entier :

$$n! = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$n!$ se lit « factorielle de n » ou « factorielle n » ou « n factorielle ».
NB : On définit de plus $0! = 1$.

Proposition 8. (Relation de récurrence de $(n!)$)

Pour tout entier naturel n, on a : $(n+1)! =$ ....

Exemple 13. Produit des entiers pairs et impairs.
Écrivons $\prod_{k=1}^{n}(2k)$ et $\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$ à l'aide de factorielles.

3.3 Coefficients binomiaux

3.3.1 Définition

Définition 5. (Coefficients binomiaux)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ par :

$$\binom{n}{k} =$$

$\binom{n}{k}$ *se lit « k parmi n »*

Remarque. Vous avez déjà vu et nous reverrons que $\binom{n}{k}$ donne le nombre de façon de choisir k éléments parmi n éléments. D'où ce nom de « k parmi n ».

Exemple 14.
Coefficients binomiaux à connaître par cœur
Pour tout entier naturel n :

$\binom{n}{0} = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\binom{n}{1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\binom{n}{n-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$; $\binom{n}{n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

3.3.2 Propriétés des coefficients binomiaux

3.3.2.1 Symétrie

Proposition 9. (Symétrie des coefficients binomiaux)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$. On a l'égalité :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3.3.2.2 Formule de Pascal

Proposition 10. (Formule de Pascal)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1\ ;\ n]\!]$. On a l'égalité :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

C'est cette formule qui justifie la construction du triangle de Pascal (voir page suivante).

Triangle de Pascal							
		k					
		0	1	2	3	4	5
n	0	$\binom{0}{0} = \ldots\ldots$					
	1	$\binom{1}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{1}{1} = \ldots\ldots$				
	2	$\binom{2}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{2}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{2}{2} = \ldots\ldots$			
	3	$\binom{3}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{3}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{3}{2} = \ldots\ldots$	$\binom{3}{3} = \ldots\ldots$		
	4	$\binom{4}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{4}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{4}{2} = \ldots\ldots$	$\binom{4}{3} = \ldots\ldots$	$\binom{4}{4} = \ldots\ldots$	
	5	$\binom{5}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{5}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{5}{2} = \ldots\ldots$	$\binom{5}{3} = \ldots\ldots$	$\binom{5}{4} = \ldots\ldots$	$\binom{5}{5} = \ldots\ldots$

3.3.2.3 Formule du comité-président

Proposition 11. (Formule du comité-président)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$. On a l'égalité :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou encore : $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3.4 Formule du binôme de Newton

Proposition 12. (Formule du binôme de Newton)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et a et b deux complexes (donc éventuellement deux réels). On a l'égalité :

$$(a+b)^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 15.
Il faut pouvoir appliquer cette formule pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$ sans hésitation :

- $(a+b)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $(a+b)^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $(a+b)^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple 16.
Calculons les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} \; ; \; B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \; ; \; C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \; ; \; D = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \; ; \; E = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$$

Parmi ces exemples, on retiendra l'égalité suivante :

Proposition 13. (Somme des $\binom{n}{k}$)
Soit $n \in \mathbb{N}$ On a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \ldots\ldots\ldots$$

4 Complément : Somme et produit d'inégalités

Proposition 14. (Sommation d'une famille d'inégalités)
Soient $u_p, u_{p+1}, \dots, u_n$ et $v_p, v_{p+1}, \dots, v_n$ des réels.

$$\textbf{Si } \forall k \in [\![p, n]\!],\ u_k \leq v_k \textbf{ Alors } \sum_{k=p}^{n} u_k \leq \sum_{k=p}^{n} v_k$$

$$\textbf{Si } \forall k \in [\![p, n]\!],\ u_k < v_k \textbf{ Alors } \sum_{k=p}^{n} u_k < \sum_{k=p}^{n} v_k$$

Méthode à retenir n° 1

Encadrement, majoration ou minoration d'une somme

Pour encadrer, minorer ou majorer une somme, toujours commencer par essayer d'encadrer, de minorer ou de majorer le terme général de la suite par :

- Soit des termes constants,
- Soit des termes que l'on sait sommer.

Remarque : lorsque k va de 0 à n, on a toujours l'encadrement $0 \leq k \leq n$ qui peut fournir un encadrement du terme de la somme.
Il se peut que l'encadrement obtenu ne soit pas fructueux pour la suite. Dans ce cas il faut trouver un meilleur encadrement du terme général...

Exemple 17.
Encadrer chacune des sommes ci-dessous et étudier leur comportement asymptotique.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{n^2}$

Proposition 15. (Produit d'inégalités à termes tous positifs)
Soient $u_p, u_{p+1}, \dots, u_n$ et $v_p, v_{p+1}, \dots, v_n$ des réels.

$$\textbf{Si } \forall k \in [\![p, n]\!],\ 0 \leq u_k \leq v_k \textbf{ Alors } \prod_{k=p}^{n} u_k \leq \prod_{k=p}^{n} v_k$$

$$\textbf{Si } \forall k \in [\![p, n]\!],\ 0 \leq u_k < v_k \textbf{ Alors } \prod_{k=p}^{n} u_k < \prod_{k=p}^{n} v_k$$