DM n° 3 - Suite logistique

On considère un réel $\mu \in]0,4[$ et la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \,]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mu u_n(1-u_n). \end{cases}$$

Le but de ce DM est d'étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n) selon la valeur de μ et de u_0.

On pourra aller observer le comportement de cette suite selon la valeur de u_0 et μ en cliquant sur ce lien. Nous nous contenterons d'étudier cette suite dans deux cas simples.

Étude préliminaire de la fonction de récurrence.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mu x(1-x)$.

   (a) Justifier que le tableau de variation de f sur $[0,1]$ est le suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\mu}{4}$	$\searrow$	0

   (b) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

   (c) Justifier que le tableau de signe $f(x) - x$ pour $x \in [0,1]$ est le suivant :

   Si $\mu \in]0,1]$:

x	0		1
$f(x)-x$		$-$	

   Si $\mu \in]1,4[$:

x	0		$1-\frac{1}{\mu}$		1
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

Étude du cas $\mu \in]0,1]$

2. On suppose dans cette question que $\mu \in]0,1]$.

   (a) A l'aide de la question 1.c, démontrer que (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

   (b) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ que vous déterminerez.

Tournez la page

Étude du cas $\mu \in]1, 2]$

3. On suppose dans cette question que $\mu \in]1, 2]$. On pose $m = 1 - \dfrac{1}{\mu}$.

   (a) Démontrer que $0 < m \leq \dfrac{1}{2}$.

   (b) A l'aide de la question 1.a, démontrer que $u_1 \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$.

   (c) On considère dans cette question que $0 < u_1 \leq m$.

      i. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq m$.

      ii. En déduire, à l'aide de la question 1.c, que (u_n) est croissante, puis qu'elle converge vers une limite ℓ que vous préciserez.

   (d) (Facultatif) Traiter maintenant le cas $m < u_1 \leq \dfrac{1}{2}$.