Exercices d'approfondissement sur les suites et les sommes

Exercice 1. **(★)** (*Voir la correction ici*)

1. On considère la suite définie par $u_0 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 5$. Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
2. Même question avec $u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
3. Même question avec $u_0 = 1,\ u_1 = 12,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$.

Exercice 2. (*Voir la correction ici*)
Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

1. (★) $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$.
2. (★) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{3n+1}$
3. (★) $u_n = \dfrac{(\ln n)(\sin n)}{n}$
4. (★★) $u_n = (n^2+1)e^{-\sqrt{n}}$.
5. (★) $u_n = \ln(\sin(\pi \cos(e^{-n})))$.

Exercice 3. **(★)** (*Voir la correction ici*)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}$. Si (u_n) converge, quelle est sa limite ?
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{-1}{u_n+1}$. Cette suite converge-t-elle ?

Exercice 4. **(★★★)** (*Voir la correction ici*)
Démontrer les propositions suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2!\,4!\dots(2n)! \geq ((n+1)!)^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Exercice 5. **(★★)**

1) $\forall n \geq 1,\ (n+1)! \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$

Exercice 6. **(★★)**

1) $\forall n \geq 1,\ (n+1)! \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k.k! = (n!)^{n+1}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$

Exercice 7. (★★)

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$.

Exercice 8. (★★)

Simplifier l'expression : $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)\,!}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 9. (★★) (*Voir l'indication ici*)

Calculer, pour tout $n \geq 2$, les sommes suivantes :

- $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
- $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^k$
- $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 10. (★★★) (*Voir l'indication ici*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les sommes

$$A_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}, \quad S_n = \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}$$

1. Calculer A_n et B_n en fonction de n.
2. En déduire S_n et T_n en fonction de n.
3. Déterminer $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$.

Indications

Exercice 9 - Indication. (*retour à l'exercice 9*)
Dans toutes ces sommes, on peut utiliser le comité président pour se débarrasser du k ou du $\frac{1}{k+1}$ devant le coefficient binomial. Et finir en faisant apparaître un binôme de Newton.

Exercice 10 - Indication. (*retour à l'exercice 10*)
Vous remarquerez ici l'utilisation particulière du symbole $\sum$:
- $\sum\limits_{0\leq 2k\leq n} u_{2k}$ est la somme des u_{2k} avec $2k$ compris entre 0 et n. C'est donc la somme de tous les termes pairs compris entre 0 et n.
- $\sum\limits_{0\leq 2k+1\leq n} u_{2k+1}$ est la somme des u_{2k+1} avec $2k+1$ compris entre 0 et n. C'est donc la somme de tous les termes impairs compris entre 0 et n.

1. Facile et fait en cours.
2. - Remarquer que $S_n + T_n = A_n$.
   - Remarquer ensuite que $S_n = \sum\limits_{0\leq 2k\leq n} (-1)^{2k}\binom{n}{2k}$ et que $T_n = -\sum\limits_{0\leq 2k+1\leq n} (-1)^{2k+1}\binom{n}{2k+1}$.
   - En déduire que $S_n - T_n = B_n$.
   - En déduire S_n et T_n
3. C'est S_{2n} !

Solutions

Exercice 1 - Correction. (*retour à l'exercice 1*)

1. Il faut d'abord déterminer l'expression de (u_n).
   Comme c'est une suite arithmético-géométrique, c'est facile et on trouve : $u_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10$.
   On a alors :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} -4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10 = -4\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=0}^{n} 10$$
$$= -4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + 10(n+1)$$
$$= \boxed{-8\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)}.$$

2. Il faut d'abord déterminer l'expression de (u_n).
   Comme c'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (avec $\Delta = 0$), c'est facile et on trouve : $u_n = 2^n$.
   On a alors :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 2^k \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = \boxed{2^{n+1}-1}$$

3. Il faut d'abord déterminer l'expression de (u_n).
   Comme c'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 (avec $\Delta > 0$), c'est facile et on trouve : $u_n = 3\times 2^n - 2(-3)^n$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} 3 \times 2^k - 2(-3)^k \\
&= 3\sum_{k=0}^{n} 2^k - 2\sum_{k=0}^{n}(-3)^k \\
&= 3 \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 2 \times \frac{1-(-3)^{n+1}}{1-(-3)} \\
&= 3\left(2^{n+1}-1\right) - \frac{1}{2}\left(1-(-3)^{n+1}\right) \\
&= \boxed{3 \times 2^{n+1} + \frac{1}{2}(-3)^{n+1} - \frac{7}{2}}
\end{aligned}$$

Exercice 2 - Correction. (*retour à l'exercice 2*)

1. Correction en vidéo de cette question

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

$(\sin n)$ est bornée

et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$

2. Correction en vidéo de cette question

2. $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{3n+1}$

$$u_n = \frac{\cancel{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)}{\cancel{n}\left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{3 + \frac{1}{n}}$$

Or $\left((-1)^n\right)$ est bornée (entre -1 et 1)

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} = 1$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \dfrac{1}{n} = 3$

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$

3. Correction en vidéo de cette question

3. $u_n = \dfrac{\ln n \times \sin n}{n}$

$$= \frac{\ln n}{n} \times \sin n$$

La suite $(\sin n)$ est bornée

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ (croiss. comparée).

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

4. Correction en vidéo de cette question

4. $u_n = (n^2+1)e^{-\sqrt{n}}$

On pose $X = \sqrt{n}$ $(n = X^2)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{X\to+\infty} (X^4+1)e^{-X}$

$= \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X^4}{e^X}\left(1+\frac{1}{X^4}\right)$

Or $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X^4}{e^X} = 0$

et $\lim\limits_{X\to+\infty} 1+\frac{1}{X^4} = 1$

Donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X^4}{e^X}\left(1+\frac{1}{X^4}\right) = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

5. Correction en vidéo de cette question

5. $u_n = \ln(\sin(\pi\cos(e^{-n})))$

$\forall n \geq 1$, $e^{-n} \leq e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 < \frac{\pi}{2}$.

et $e^{-n} > 0$

Donc $0 < e^{-n} < \frac{\pi}{2}$

D'où $0 < \cos(e^{-n}) < 1$

Donc $0 < \pi\cos(e^{-n}) < \pi$

D'où $\sin(\pi\cos(e^{-n})) > 0$

Donc (u_n) est bien définie.

$e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\cos(e^{-n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

d'où $\pi\cos(e^{-n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$

donc $\sin(\pi\cos(e^{-n})) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$

D'où $\ln(\sin(\pi\cos(e^{-n}))) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Exercice 3 - Correction. (*retour à l'exercice 3*)

1. Correction en vidéo de cette question

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 4}{u_n - 1}$$

On suppose que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

$$\lim_{n\to+\infty} 3u_n - 4 = 3\ell - 4$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 1 = \ell - 1$

• Supposons que $\ell \neq 1$.

Dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3u_n-4}{u_n-1} = \dfrac{3\ell-4}{\ell-1}$.

On a donc $\dfrac{3\ell-4}{\ell-1} = \ell$

$\iff 3\ell - 4 = \ell^2 - \ell$

$\iff \ell^2 - 4\ell + 4 = 0$

$\iff (\ell-2)^2 = 0$

$\iff \boxed{\ell = 2}$

• Si $\ell = 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} 3u_n - 4 = -1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$

Donc $\dfrac{3u_n-4}{u_n-1}$ ne converge pas. Absurde !

Donc $\boxed{\ell = 2}$

2. Correction en vidéo de cette question

2. $u_{n+1} = \dfrac{-1}{u_n+1}$.

Supposons que (u_n) converge vers une limite ℓ.

(u_{n+1}) converge alors aussi vers ℓ.

• On a $\ell \neq -1$, car sinon $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 1 = 0$

et alors $\left(\dfrac{-1}{u_n+1}\right)$ ne converge pas.

absurde car $\dfrac{-1}{u_n+1} = u_{n+1}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{u_n+1} = \dfrac{-1}{\ell+1}$

On a donc $\ell = \dfrac{-1}{\ell+1}$

$\iff \ell^2 + \ell = -1$

$\iff \ell^2 + \ell + 1 = 0$

$\Delta = -1 - 4 = -5 < 0$

pas de solution réelle !

Donc il n'y a pas de valeur possible pour ℓ.

Donc (u_n) ne converge pas.

Exercice 4 - Correction. (*retour à l'exercice 4*)

1. Correction en vidéo de cette question

On raisonne par récurrence.

On pose $\mathcal{S}(n)$: « $2!\,4!\cdots(2n)! \geqslant \left((n+1)!\right)^n$ »

(I) $(n=1)$

$2! = 2$ et $\left((1+1)!\right)^1 = 2! = 2$

Donc $\mathcal{S}(1)$ est vraie.

(H) Soit $n \geqslant 1$.

On suppose $\mathcal{S}(n)$ vraie. Montrons $\mathcal{S}(n+1)$.

On a :

$$2!\,4!\cdots(2n)! \geqslant \left((n+1)!\right)^n \quad \text{par hyp. de rec.}$$

$$\iff 2!\,4!\cdots(2n)!\,(2(n+1))! \geqslant \left((n+1)!\right)^n \times (2(n+1))!$$

$$\iff 2!\,4!\cdots(2(n+1))! \geqslant \left((n+1)!\right)^n (2n+2)!$$

Il reste à montrer que :

$$\left((n+1)!\right)^n (2n+2)! \geqslant \left((n+2)!\right)^{n+1}$$

(H) Soit $n \geqslant 1$.

On suppose $\mathcal{S}(n)$ vraie. Montrons $\mathcal{S}(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k-1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+2}}_{0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$$

Donc $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie

2. Correction en vidéo de cette question

On pose $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ »

(I) $(n=1)$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{(-1)^0}{1} + \frac{(-1)^1}{2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

(H) Soit $n \geqslant 1$.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k-1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+2}}_{0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie