Devoir Surveillé n° 2

Soignez au maximum la rédaction et la présentation. ***Encadrez vos résultats***
Vous pouvez traiter les exercices dans le désordre, mais, à l'intérieur d'un exercice, vous devez traiter les questions dans l'ordre. ***Toute question non numérotée ne sera pas notée !***
Bon travail !

Exercice 1 : Pour s'échauffer

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1,\ u_1 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$.
Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 2 : Deux suites conjointes et deux suites auxiliaires.

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 4$ et $v_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 2v_n}{3} + 1 \\ v_{n+1} = -4u_n - v_n + 2 \end{cases}$$

On définit ensuite les suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n = 3u_n + v_n \\ b_n = 2u_n + v_n \end{cases} .$$

1. Montrer que (a_n) est arithmétique de raison 5.
2. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
3. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3} + 4$.
4. En déduire l'expression de b_n en fonction de n.
5. Exprimer u_n et v_n en fonction de a_n et b_n et en déduire les expressions de u_n et v_n.

Exercice 3 : Nombre d'or et suite de Fibonacci

Partie A : formule explicite de la suite de Fibonacci

On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (c'est le nombre d'or) et on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0\ ;\ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{(c'est la suite de Fibonacci).}$$

1. Justifier que $\varphi > 1$ et que $-\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
2. Démontrer alors qu'il existe deux réels λ et μ, **que vous déterminerez**, tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n.$$
3. En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

Partie B : Une suite convergeant vers le nombre d'or

4. Démontrer que $\sqrt{1+\varphi} = \varphi$.
5. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = \sqrt{1+v_n}$.
   (a) Calculer v_2 et v_3.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, v_n est définie et $1 \leq v_n \leq \varphi$.
   (c) Démontrer par récurrence que (v_n) est croissante. Vous démontrerez plus précisément par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq v_{n+1}$.
   (d) En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.
6. (a) Démontrer que pour tous réels a et b positifs, $\left|\sqrt{1+a} - \sqrt{1+b}\right| \leq \dfrac{1}{2}|a-b|$. (On pourra penser à la quantité conjuguée). Vous justifierez bien les détails de votre raisonnement.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $|v_{n+1} - \varphi| \leq \dfrac{1}{2}|v_n - \varphi|$.
   (c) En déduire, par récurrence, que pour tout entier $n \geq 1$, $|v_n - \varphi| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Exercice 4 : Polynômes de Tchebychev de 1ère espèce

Pour tout entier naturel n, on appelle "polynôme de Tchebychev de 1ère espèce" le polynôme T_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos x).$$

On admet ici l'existence et l'unicité du polynôme T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer les polynômes T_0, T_1, T_2.
2. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$. En déduire T_3.
3. Le but de cette question est de démontrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) \quad (*).$$
   (a) Rappeler les formules dites "d'addition" $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.
   (b) En déduire la formule dite "de linéarisation" :
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$$
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n et tout réel x :
$$2\cos\Big((n+1)x\Big)\cos x = \cos\Big((n+2)x\Big) + \cos(nx)$$
   (d) En déduire l'égalité $(*)$.
4. A l'aide de l'égalité $(*)$, déterminer T_4.

Exercice 5 : Deux suites encadrant π

1. En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. On note pour tout $x \in I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$:
$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$
   (a) Factoriser le polynôme $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$ puis donner son tableau de signe sur $\mathbb{R}$.
   (b) On pose $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in I$.
   Justifier que u est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $u'(x) = \frac{P(\cos(x))}{3\cos^2(x)}$.
   (c) En déduire que u est croissante sur I et tracer son tableau de variations (avec la limite en $\frac{\pi}{2}$).
   (d) En déduire le signe de u sur I.
   (e) On pose $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in I$.
   Justifier qu'il existe un polynôme Q, de degré deux, tel que pour tout $x \in I$, $v'(x) = \frac{Q(\cos(x))}{(2+\cos x)^2}$.
   (f) En déduire que v est croissante sur I et tracer son tableau de variations (sans la limite en $\frac{\pi}{2}$).
   (g) En déduire le signe de v sur I.
   (h) A l'aide des questions 2(d) et 2(g), montrer que :
$$\forall x \in I, \ g(x) \leq x \leq f(x).$$
   (i) A l'aide de la question 1, en déduire un encadrement de π.
3. On pose pour tout entier naturel n,
$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \cos\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right).$$
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} \leq \pi \leq 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).$$