Devoir Surveillé n° 2 - Correction

Exercice 1 : Pour s'échauffer

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout son équation caractéristique :

$$\begin{aligned} & x^2 = x + 6 \\ \iff & x^2 - x - 6 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$ donc il y a deux racines réelles : $r_1 = \dfrac{1+5}{2} = 3$ et $r_2 = \dfrac{1-5}{2} = -2$.

D'après les cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, il existe donc deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda \times 3^n + \mu \times (-2)^n.$$

En appliquant cette égalité pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u_0 = \lambda \times 3^0 + \mu \times (-2)^0 \\ u_1 = \lambda \times 3^1 + \mu \times (-2)^1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 8 = 3\lambda - 2\mu \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 1 - \lambda = \mu \\ 8 = 3\lambda - 2(1-\lambda) \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 1 - \lambda = \mu \\ 8 = 5\lambda - 2 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 1 - \lambda = \mu \\ \lambda = 2 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \mu = 1 - 2 = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{u_n = 2 \times 3^n - (-2)^n.}$$

Exercice 2 : Deux suites conjointes et deux suites auxiliaires.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= 3\left(\frac{7u_n + 2v_n}{3} + 1\right) - 4u_n - v_n + 2 \\ &= 7u_n + 2v_n + 3 - 4u_n - v_n + 2 \\ &= 3u_n + v_n + 5 \\ &= a_n + 5. \end{aligned}$$

   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + 5$, donc (a_n) est arithmétique de raison 5.

2. D'après le cours sur les suites arithmétiques on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + 5n$.
   Or $a_0 = 3u_0 + v_0 = 3 \times 4 + -1 = 11$. Donc :

$$\boxed{a_n = 11 + 5n}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= 2\left(\frac{7u_n + 2v_n}{3} + 1\right) - 4u_n - v_n + 2 \\ &= \frac{14u_n + 4v_n}{3} + 2 - 4u_n - v_n + 2 \\ &= \frac{14}{3}u_n + \frac{4}{3}v_n + 2 - 4u_n - v_n + 2 \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + 4 \\ &= \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \\ &= \boxed{\frac{b_n}{3} + 4} \end{aligned}$$

4. On reconnaît que (b_n) est une suite arithmético-géométrique.
On résout son équation associée :

$$\begin{aligned} & x = \frac{x}{3} + 4 \\ \iff & \frac{2x}{3} = 4 \\ \iff & x = 6 \end{aligned}$$

On pose donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = b_n - 6$. Montrons que la suite (c_n) ainsi définie est géométrique.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= b_{n+1} - 6 \\ &= \frac{b_n}{3} + 4 - 6 \\ &= \frac{c_n + 6}{3} - 2 \\ &= \frac{c_n}{3} + \frac{6}{3} - 2 \\ &= \frac{c_n}{3}. \end{aligned}$$

Donc la suite (c_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = c_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ avec $c_0 = b_0 - 6$.
Or $b_0 = 2u_0 + v_0 = 2 \times 4 - 1 = 7$.
Donc $c_0 = 7 - 6 = 1$.
D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$. et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{b_n = \frac{1}{3^n} + 6.}$$

5. *Cette question était plus difficile.*
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} a_n = 3u_n + v_n & (E_1) \\ b_n = 2u_n + v_n & (E_2) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} a_n - b_n = u_n & (E_1 \leftarrow E_1 - E_2) \\ b_n = 2u_n + v_n \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} a_n - b_n = u_n \\ b_n = 2(a_n - b_n) + v_n \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} a_n - b_n = u_n \\ b_n = 2a_n - 2b_n + v_n \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} a_n - b_n = u_n \\ -2a_n + 3b_n = v_n \end{cases} \\
\iff &\boxed{\begin{cases} u_n = a_n - b_n \\ v_n = -2a_n + 3b_n \end{cases}}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} u_n = 5n + 11 - \left(\dfrac{1}{3^n} + 6\right) \\ v_n = -2(5n + 11) + 3\left(\dfrac{1}{3^n} + 6\right) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} u_n = 5n + 11 - \dfrac{1}{3^n} - 6 \\ v_n = -10n - 22 + \dfrac{3}{3^n} + 18 \end{cases} \\
\iff &\boxed{\begin{cases} u_n = 5n + 5 - \dfrac{1}{3^n} \\ v_n = -10n - 4 + \dfrac{1}{3^{n-1}} \end{cases}}
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Nombre d'or et suite de Fibonacci

Partie A : formule explicite de la suite de Fibonacci

On pose $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (c'est le nombre d'or) et on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{(c'est la suite de Fibonacci).}$$

1. On a $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$.
   Donc $1+\sqrt{5} > 1+2 = 3$.
   Et donc : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > \dfrac{3}{2} > 1$.
   On a donc bien $\varphi > 1$.

   D'autre part :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\varphi} &= -\frac{2}{1+\sqrt{5}} \\
&= -\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} \\
&= -\frac{2-2\sqrt{5}}{1-5} \\
&= -\frac{2-2\sqrt{5}}{1-5} \\
&= -\frac{2-2\sqrt{5}}{-4} \\
&= \frac{2-2\sqrt{5}}{4} \\
&= \boxed{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}
\end{aligned}$$

2. (u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On résout son équation caractéristique :

$$\begin{aligned}
& x^2 = x+1 \\
\iff & x^2 - x - 1 = 0
\end{aligned}$$

   $\Delta = (-1)^2 - 4\times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc il y a deux racines réelles : $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\varphi}$.

   D'après les cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, il existe donc deux réels λ et μ tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \lambda \varphi^n + \mu \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n.}$$

En appliquant cette égalité pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} u_0 = \lambda\varphi^0 + \mu\left(-\dfrac{1}{\varphi}\right)^0 \\ u_1 = \lambda\varphi^1 + \mu\left(-\dfrac{1}{\varphi}\right)^1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda\varphi + \mu\left(-\dfrac{1}{\varphi}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda = \mu \\ 1 = \lambda \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda = \mu \\ 1 = \lambda \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \lambda \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda = \mu \\ 1 = \lambda\left(\underbrace{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}_{\sqrt{5}}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda = \mu \\ 1 = \lambda \times \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} \mu = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}}$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-\dfrac{1}{\varphi}\right)^n$. C'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right).}$$

Cette expression s'appelle "Formule de Binet". Du nom de Jacques Philippe Marie Binet qui a redécouvert cette formule en 1843. Formule qui avait déjà été obtenue par de Abraham de Moivre en 1718 et par Leonhard Euler en 1764.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1}\right).}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n} - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n}\right).} \\
&= \frac{\varphi^{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{n+1}}}{\varphi^{n} - \frac{(-1)^{n}}{\varphi^{n}}} \\
&= \frac{\varphi^{n+1}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{2n+2}}\right)}{\varphi^{n}\left(1 - \frac{(-1)^{n}}{\varphi^{2n}}\right)} \\
&= \varphi \times \frac{1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{2n+2}}}{1 - \frac{(-1)^{n}}{\varphi^{2n}}}
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{2n+2}} = 0$ (suite bornée divisé par une suite qui tend vers $+\infty$) et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{2n}} = 0$ (même raison).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\varphi}^{2n+2}}{1 - \left(\frac{(-1)^{n}}{\varphi}\right)^{2n}} = 1$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \varphi}$ et donc : $\boxed{\text{la suite } \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \varphi.}$

Partie B : Une suite convergeant vers le nombre d'or

4. φ est solution de l'équation $x^2 = x + 1$ donc $\varphi^2 = \varphi + 1$.
   Les deux termes de cette égalité étant positifs, on en déduit que : $\sqrt{\varphi^2} = \sqrt{\varphi + 1}$.
   On rappelle que $\sqrt{\varphi^2} = |\varphi|$. Or ici $\varphi > 0$, donc $\sqrt{\varphi^2} = \varphi$.
   On a donc bien l'égalité demandée :

$$\boxed{\sqrt{1+\varphi} = \varphi.}$$

5. (a) $v_2 = \sqrt{1+v_1} = \boxed{\sqrt{2}}$ et $v_3 = \sqrt{1+v_2} = \boxed{\sqrt{1+\sqrt{2}}.}$

   En fait, on a $u_n = \overbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}}^{n \text{ racines}}.$

   (b) On note $\mathscr{P}(n)$ la propriété « v_n est définie et $1 \leq v_n \leq \varphi$ ».
   Initialisation $(n = 1)$
   v_1 est défini par l'énoncé et vaut 1 donc on a bien $1 \leq v_1 \leq \varphi$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
   v_n existe par hypothèse de récurrence et est supérieur à 1 donc $1 + v_n$ est positif, donc $\sqrt{1+v_n}$ est bien défini.
   Ainsi, v_{n+1} est bien défini.
   On a, par hypothèse de récurrence : $1 \leq v_n \leq \varphi$.
   Donc $2 \leq 1 + v_n \leq 1 + \varphi$.
   Et donc, par croissance de la fonction racine carrée : $\sqrt{2} \leq \sqrt{1+v_n} \leq \sqrt{1+\varphi}$.
   Ce qui équivaut à : $\sqrt{2} \leq v_{n+1} \leq \varphi$.

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

(c) On note $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $v_n \leq v_{n+1}$ ».
Initialisation ($n = 1$)
$v_1 = 1$ et $v_2 = \sqrt{2} > 1$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
On a $v_n \leq v_{n+1}$ donc $1 + v_n \leq 1 + v_{n+1}$ donc, par croissance de la fonction racine carrée, $\sqrt{1+v_n} \leq \sqrt{1+v_{n+1}}$.
Ce qui s'écrit aussi $v_{n+1} \leq v_{n+2}$. Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

(d) (v_n) est croissante et majorée par φ donc elle converge.
Notons ℓ la limite de (v_n). On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+v_n} = \sqrt{1+\ell}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \sqrt{1+v_n}$.
Donc (v_{n+1}) et $\left(\sqrt{1+v_n}\right)$ ont même limite.
Donc $\ell = \sqrt{1+\ell}$.
Ce qui équivaut (puisque $\ell > 0$) à $\ell^2 = 1+\ell$. Donc ℓ est la solution positive de l'équation $x^2 = 1+x$.
Donc $\ell = \varphi$.
On a donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \varphi.}$$

On a donc démontré que la suite définie par : $u_n = \overbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}}^{n \text{ racines}}$ *tend vers le nombre d'or quand n tend vers $+\infty$.*

6. (a) Soient a et b des réels positifs, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{1+a} - \sqrt{1+b}\right| &= \left|\frac{(\sqrt{1+a}-\sqrt{1+b})(\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b})}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}\right| \\
&= \left|\frac{\sqrt{1+a}^2-\sqrt{1+b}^2}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}\right| \\
&= \left|\frac{1+a-(1+b)}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}\right| \\
&= \left|\frac{a-b}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}\right| \\
&= \frac{|a-b|}{\left|\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}\right|} \\
&= \frac{|a-b|}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}} \qquad \textit{car } \sqrt{1+a}+\sqrt{1+b} > 0
\end{aligned}$$

Or $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b} \geq 1+1 = 2$
Donc $\dfrac{|a-b|}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}} \leq \dfrac{|a-b|}{2}$.
On a donc bien :

$$\boxed{\left|\sqrt{1+a}-\sqrt{1+b}\right| \leq \frac{1}{2}|a-b|}$$

.

(b) Soit $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
|v_{n+1} - \varphi| &= \left|\sqrt{1+v_n} - \sqrt{1+\varphi}\right| \\
&\leq \frac{1}{2}|v_n - \varphi| \qquad \textit{D'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$|v_{n+1}-\varphi| \leq \frac{1}{2}|v_n-\varphi|.$$

(c) On note $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $|v_n-\varphi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ ».
Initialisation ($n=1$)
$|v_1-\varphi| = \left|1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Or $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$, donc $\sqrt{5}-1 < 2$ et donc $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$. Or $\frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{2^0} = 1$.
Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
On a $|v_{n+1}-\varphi| \leq \frac{1}{2}|v_n-\varphi|$ d'après la question précédente.
Or $|v_n-\varphi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ par hypothèse de récurrence.
Donc $\frac{1}{2}|v_n-\varphi| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$ On en déduit donc que $|v_{n+1}-\varphi| \leq \frac{1}{2^n}$.
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 4 : Polynômes de Tchebychev de 1ère espèce

Pour tout entier naturel n, on appelle "polynôme de Tchebychev de 1ère espèce" le polynôme T_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = T_n(\cos x).$$

On admet ici l'existence et l'unicité du polynôme T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Il était plus difficile de déterminer T_0 et T_1 que T_2. Nous avions d'ailleurs traité cette question, comme la suivante, en classe.*
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \cos(x)$. D'après l'énoncé, on a alors $\cos(nx) = T_n(X)$.
Pour trouver le polynôme T_n, on exprime donc $\cos(nx)$ en fonction de $\cos x$ et on remplace ensuite $\cos x$ par X.

$\cos(0x) = 1$ donc $\boxed{T_0(X) = 1}$ (il n'y avait rien à remplacer).

$\cos(1x) = \cos(x) = X$. Donc $\boxed{T_1(X) = X.}$

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = 2X^2 - 1$. Donc $\boxed{T_2(X) = 2X^2 - 1.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \cos(x)$.

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(x+2x) \\
&= \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \qquad = \cos x(2\cos^2 x - 1) - \sin x(2\sin x \cos x) \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x \qquad = 4X^3 - 3X
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{T_3(X) = 4X^3 - 3X.}$

3. Le but de cette question est de démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X) \quad (*).$$

(a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

(b) En additionnant terme à terme les deux égalités précédentes, on obtient :
$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$.
On en déduit l'égalité demandée :

$$\boxed{\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, en posant $a = (n+1)x$ et $b = x$:

$$\begin{aligned} 2\cos\Big((n+1)x\Big)\cos x &= 2 \times \frac{1}{2}\Big(\cos\Big((n+1)x + x\Big) + \cos\Big((n+1)x - x\Big)\Big). \\ &= \cos(nx+2x) + \cos(nx) \\ &= \cos\Big((n+2)x\Big) + \cos(nx) \end{aligned}$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\cos\Big((n+1)x\Big) = T_{n+1}(\cos x)$ et $\cos\Big((n+2)x\Big) = T_{n+2}(\cos x)$.
Ainsi, l'égalité démontrée à la question précédente s'écrit
$2T_{n+1}(\cos x)\cos x = T_{n+2}(\cos x) + T_n(\cos x)$.
Ce qui s'écrit, en posant $X = \cos x$: $2T_{n+1}(X) \times X = T_{n+2}(X) + T_n(X)$.
On a donc l'égalité demandé, mais seulement pour tout réel X tel que il existe un réel x tel que $X = \cos x$.
Il y a une infinité de telles valeurs, or deux polynômes qui sont égaux pour une infinité de valeurs sont égaux. On a donc l'égalité demandée pour tout réel X.

4. On applique l'égalité $(*)$ avec $n = 2$:

$$\begin{aligned} & 2T_3(X) \times X = T_4(X) + T_2(X) \\ \iff & T_4(X) = 2T_3(X) \times X - T_2(X) \\ \iff & T_4(X) = 2(4X^3 - 3X)X - (2X^2 - 1) \\ \iff & T_4(X) = 8X^4 - 6X^2 - 2X^2 + 1 \\ \iff & T_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{T_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1}$$

Exercice 5 : Deux suites encadrant π

1. $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$.
$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$.
$\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2} = \frac{8-2\sqrt{12}}{4} = 2 - \sqrt{3}$.

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ et } \tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.}$$

2. (a) On remarque que $P(1) = 0$, c'est-à-dire que 1 est racine de P. On peut donc factoriser P par $X - 1$. C'est-à-dire qu'il existe 3 réels a, b et c tels que :

$$P(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c)$$

Déterminons a, b et c. On a :

$$\begin{aligned}
& \forall X \in \mathbb{R},\ P(X) = (X-1)(aX^2+bX+c) \\
\iff & \forall X \in \mathbb{R},\ 2X^3-3X^2+1 = (X-1)(aX^2+bX+c) \\
\iff & \forall X \in \mathbb{R},\ 2X^3-3X^2+1 = aX^3+bX^2+cX-aX^2-bX-c \\
\iff & \forall X \in \mathbb{R},\ 2X^3-3X^2+1 = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c \\
\iff & \begin{cases} 2 = a \\ -3 = b-a \\ 0 = c-b \\ 1 = -c \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} a = 2 \\ b = -3+a = -1 \\ c = b = -1 \\ c = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc : $P(X) = (X-1)(2X^2-X-1)$.
Or $2X^2-X-1$ est un trinôme dont les racines sont 1 et $-\dfrac{1}{2}$.
D'où : $P(X) = (X-1)\times 2(X-1)\left(X+\dfrac{1}{2}\right) = 2(X-1)^2\left(X+\dfrac{1}{2}\right)$.

$$\boxed{P(X) = 2(X-1)^2\left(X+\frac{1}{2}\right).}$$

(b) u est somme de trois fonctions dérivables sur I, donc est dérivable sur I, et :
$\forall x \in I, \quad u'(x) = \dfrac{1}{3}\left(2\cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right) - 1 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2\cos^3 x + 1 - 3\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)$.

$$\boxed{u \text{ est dérivable sur } I \text{ et : } \forall x \in I, u'(x) = \frac{P(\cos x)}{3\cos^2 x}.}$$

(c) $3\cos^2 x$ étant toujours positif, $u'(x)$ est du signe de $P(\cos x)$.
Et $P(\cos x) = 2(\cos x - 1)^2\left(\cos x + \dfrac{1}{2}\right)$.
Or, pour tout $x \in I$, $0 < \cos x < 1$, donc $\cos x - 1 > 0$ et $\cos x + \dfrac{1}{2} > 0$. Donc $P(\cos x) > 0$.
D'où $u'(x) > 0$.

$$\boxed{u \text{ est strictement croissante sur } I.}$$

De plus, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} u(x) = +\infty$.
D'où le tableau :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$u(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

(d) On déduit du tableau de variations ci-dessus que u est strictement positive sur I.

(e) Notons que g est dérivable car quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. Donc v est dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables.
Pour tout x de I,
$$g'(x) = \frac{3\cos x \times (2+\cos x) - 3\sin x \times (-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{6\cos x + 3}{(2+\cos x)^2}$$
$$v'(x) = 1 - g'(x) = \frac{(2+\cos x)^2 - 6\cos x - 3}{(2+\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x - 2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in I, \quad v'(x) = \frac{Q(\cos x)}{(2+\cos x)^2} \text{ où } Q(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2.}$$

(f) Q est positif et ne s'annule qu'en 1, et, sur I, $\cos$ ne vaut jamais 1, donc v' est strictement positive sur I.

$$\boxed{v \text{ est strictement croissante sur } I.}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$v(x)$	0 $\nearrow$	

(g) On déduit du tableau de variations ci-dessus que v est strictement positive sur I.

(h) On a, pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.
C'est-à-dire : $f(x) - x > 0$ et $x - g(x) > 0$
C'est-à-dire : $f(x) > x$ et $x > g(x)$.
On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in I, \ g(x) < x < f(x).}$$

(i) Après quelques calculs palpitants,
$$g\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{156\sqrt{6} - 132\sqrt{2} - 3\sqrt{12} - 84}{386} \text{ et } f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{4 + \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{12}}{6}$$
En utilisant 1.(h) avec $x = \pi/12$, on obtient :

$$\boxed{\frac{936\sqrt{6} - 792\sqrt{2} - 18\sqrt{2} - 504}{193} < \pi < 8 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{12}}$$

3. En appliquant 1.(h) à $x = \dfrac{\pi}{3 \times 2^n}$, qui est bien dans I, on obtient :
$$g\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) < \frac{\pi}{3 \times 2^n} < f\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$
Or $g\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = \dfrac{3\sin\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)}{2 + \cos\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)} = \dfrac{3a_n}{2+b_n}$
et $f\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = \dfrac{1}{3}\left(2\sin\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right) + \tan\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)\right) = \dfrac{1}{3}\left(2a_n + \dfrac{a_n}{b_n}\right)$.
On obtient donc :
$$\frac{3a_n}{2+b_n} < \frac{\pi}{3 \times 2^n} < \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right)$$
Et en multipliant par 3×2^n :

$$\boxed{9 \times 2^n \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n\left(2a_n + \frac{a_n}{b_n}\right).}$$