Programme de colle n°6- semaine du 2/11/20

Liste des démonstrations/Exercices à savoir refaire :

1. Savoir démontrer la formule de Pascal.
2. Savoir refaire les questions 2 et 3 de l'exemple 11
3. Savoir refaire l'exercice 8 (corrigé en classe).

Connaissances attendues :

Le minimum vital

Ce que vous ne pouvez pas ne pas savoir !

Connaître les 5 formules suivantes :

Sommes de 1 et sommes constantes : $\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$; $\sum_{k=p}^{n} a = (n - p + 1) \times a$

sommes de k et somme de k^2 : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

NB :

- Savoir que ces formules sont aussi valables si k part de 1 au lieu de 0.
- Savoir s'en sortir si k ne part ni de 0 ni de 1 en ajoutant les termes manquants.

Sommes géométriques : **Si $q \neq 1$** : $\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} = q^p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$

Formule du binôme de Newton : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

Connaître les techniques de calcul de sommes suivantes :

Savoir calculer une somme par linéarité

$$\text{Par exemple, savoir écrire } \sum_{k=0}^{n} 3k^2 - 6k + 2 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 - 6\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 2$$

Savoir reconnaître et calculer une somme télescopique

Savoir faire un changement d'indice.

Factorielle et coefficients binomiaux :

Connaître la définition de $n!$

Savoir, et surtout comprendre (donc savoir expliquer) par exemple que :

- $n! = n \times (n-1)!$
- $n! = n(n-1) \times (n-2)!$
- $(n+2)! = (n+2) \times (n+1)!$
- $(n+2)! = (n+2)(n+1) \times n!$
- $(n+1)! = (n+1) \times n \times (n-1)!$

Connaître la définition de $\binom{n}{k}$

Le « standard »

Ce que vous devriez aussi savoir.

Factorisation de $x^n - 1$ et $a^n - b^n$:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Savoir calculer un produit en le développant.

➔ Savoir refaire tous les calculs de l'exemple 11.

Connaître les propriétés des coefficients binomiaux :

- **Symétrie** (proposition 9 du cours)
- **Formule de Pascal** (proposition 10)
  Savoir appliquer cette égalité pas uniquement sous la forme donnée dans le cours mais sous la forme générale suivante :
  $$\binom{nombre\ 1}{nombre\ 2} + \binom{nombre\ 1}{(nombre\ 2)+1} = \binom{(nombre\ 1)+1}{(nombre\ 2)+1}$$
  Par exemple :
  $\binom{2n}{p} + \binom{2n}{p+1} = \binom{2n+1}{p+1}$ ou encore $\binom{n-1}{p-2} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p-1}$
- **Formule du comité président :** (proposition 11). Connaître les deux formules.

Connaître la somme des $\binom{n}{k}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Le « compétitif »

Si vous voulez marquer des points, il faut aussi savoir cela :

Factorisation de $x^n - 1$ et $a^n - b^n$ écrite avec le symbole somme :

$$x^n - 1 = (x-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = (x-1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}\right)$$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right)$$

Avoir bien compris le lien entre la formule de Pascale et le triangle de Pascal.

Connaître et savoir redémontrer en une ligne la somme des $\binom{n}{k}(-1)^k$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$