Feuille d'exercices n° 6 - Matrices

1 Calcul matriciel, produit de matrices, puissances de matrices carrées

Exercice 1. (pour s'exercer à la maison) (*Voir la correction ici*)
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.
Calculer $A+B$, $2A-B$, AB, BA, ${}^{t}B\,{}^{t}A$ (vérifier l'égalité), puis $3(A-2B)+2(3B+C)-(2A+C)$.

Exercice 2.
Les matrices A et B sont celles de l'exercice 1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

1. $A - 3X = 2B$.
2. $3X + 2B = 5X + A$.

Exercice 3.
Effectuer tous les produits possibles de deux des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.
On reprend les matrices de l'exercice précédent.

1. Donner ${}^{t}A$, ${}^{t}C$, ${}^{t}X$ et ${}^{t}Y$.
2. Calculer ${}^{t}XA$, ${}^{t}YD$, ${}^{t}XX$ et $X\,{}^{t}X$

Exercice 5.
Calculer, lorsque c'est possible, AB et BA.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = {}^{t}A$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 6. (*Voir la correction ici*)
Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } i+j \text{ est impair} \end{cases}$

1. (*) Écrire la matrice M. (*Demandez l'indication si vous n'y arrivez pas)*
2. Calculer M^2, M^3, M^4.
3. Conjecturer la forme de M^n puis démontrer le résultat par récurrence.

Exercice 7. (*Voir la correction ici*)
Déterminez les matrices triangulaires supérieures T telles que $T^2 = I_2$.

Exercice 8.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier :

1. $S = (2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B)$
2. $T = (A+B)(2A^2 - 2B) - 2A^2(A+B) + (-A+B)^2$.

Exercice 9.
Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice B et le réel a tels que $A = aI_3 + B$.
2. Calculer B^3.
3. En déduire la forme générale de A^n en fonction de I_3, B et B^2.

Reprendre la même démarche pour déterminer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 10.
Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \in [\![1, 3]\!], J_{i,j} = 1$.

1. Écrire J et vérifier que $J^2 = 3J$.
2. Écrire les matrices suivantes sous la forme $A = aI_3 + bJ$ et à l'aide du binôme de Newton, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 11.
Calculez pour tout entier n, A^n où $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 12. $(*)$ **Une généralisation de l'exercice 10** (*Voir la correction ici*)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], J_{i,j} = 1$.

1. Déterminer J^2
2. En déduire une expression de J^m pour tout entier $m \geq 1$.

Exercice 13.
Soient A et X deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que la matrice ${}^tAA$ est symétrique.
2. Montrer que si X est symétrique, alors ${}^tAX + XA$ est symétrique.
3. Montrer que si X est antisymétrique, alors ${}^tAX + XA$ est antisymétrique.

2 Matrices inversibles, inverse d'une matrice

Exercice 14.
Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, pour les matrices de taille 2 qui le sont, déterminer leur inverse et vérifier votre calcul en calculant AA^{-1}.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 33 & 2 & 0 \\ -12 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 15.
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse en fonction des puissances de A et I_n.

1. $A^2 + 3A - 2I_n = 0$
2. $A^2 + 6A + 8I_n = 0$
3. $A^{12} + I_n = 0$
4. $A^3 - 4A^2 + 3I_n = 0$

Exercice 16. (*Voir la correction ici*)
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$ et déduisez en que A est inversible et donnez A^{-1}.
2. Vérifiez par un calcul que la matrice A^{-1} trouvée est bien l'inverse de A.

Exercice 17.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que $A^3 - A^2 + 2A + 11I_3 = 0$.
   (b) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice carrée définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$
   (a) Quelle est la matrice $A + I_4$? Calculer alors $(A + I_4)^2$.
   (b) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 6A$. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 18.

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$. Montrer que ni A, ni B n'est inversible.
2. Soit C une matrice telle que $C^2 + C = 0$, C est-elle inversible ?

Exercice 19. (*Voir la correction ici*)

Montrez que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles.

3 Exercices d'entrainement et d'approfondissement

Exercice 20.
On note (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 8v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire un expression de X_n en fonction de A et de X_0.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer P^{-1}, puis vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on notera D.
   (b) Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (c) Calculer A^n puis X_n. En déduire l'expression de u_n et v_n.

Exercice 21. $(*)$
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = A + B$. Montrez que A et B commutent.

Exercice 22. $(*)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

1. Calculer ${}^{t}UV$ et $V\,{}^{t}U$
2. On note $\lambda = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k$. Démontrer que $(V\,{}^{t}U)^n = \lambda^{n-1} V\,{}^{t}U$

Exercice 23. **(★★★)** (*Voir l'indication ici*)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} -1 \text{ si } i < j \\ 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i > j \end{cases} .$$

1. Écrire la matrice A.
2. Démontrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 24. **(★★★)** (*Voir l'indication ici*)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \neq j \\ 0 \text{ si } i = j \end{cases}.$$

1. Écrire la matrice A.
2. Calculer A^2, en déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 25. **(★)** (*Voir l'indication ici*)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice identité d'ordre 2 : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis montrer qu'on peut l'exprimer en fonction de A et de I.
2. En déduire un polynôme annulateur P de A. On donnera P explicitement.
3. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I.
4. Démontrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n), que l'on déterminera, telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = a_n A + b_n I.$$
5. Démontrer que (a_n) est une suite linéaire d'ordre 2. Puis donner son expression ainsi que celle de (b_n).
6. En déduire l'expression de A^n en fonction de A et de I. Vérifiez si cette expression est aussi vraie pour $n = -1$.
7. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$. Retrouvez alors l'expression de A^n donnée à la question 6.
8. **Application :** On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = -1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 4v_n \end{cases}.$$
Déterminer l'expression de (u_n) et de (v_n).

Exercice 26. **(★★)** (*Voir l'indication ici*)
Pour tout réel t, on pose :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de cette forme.

1. Donner $A(1)$ et montrer que $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.
2. Soient s et t deux réels. Démontrez que $A(s)A(t) \in \mathcal{E}$. Déterminer le réel u tel que $A(s)A(t) = A(u)$. En déduire que $A(s)$ et $A(t)$ commutent.
3. (a) Trouver une matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $QX = 0$. En déduire que Q n'est pas inversible.
   (b) Montrer que si $t \neq \frac{1}{2}$, $A(t) \in GL_3(\mathbb{R})$.
4. Déterminer les matrices S de $\mathcal{E}$ solutions de $S^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right)$.
5. On pose $J = A(-1)$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite (t_n) telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J^n = A(t_n).$$
   (b) Déterminer alors une relation de récurrence entre t_{n+1} et t_n.
   (c) En déduire J^n, en donnant ses coefficients.

4 Indication

Exercice 23 - Indication. (*retour à l'exercice 23*)

1. Vous devez trouver que A est une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale et des -1 au-dessus de la diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. A étant une matrice triangulaire supérieure, appliquer la méthode vue pour déterminer l'inverse d'une triangulaire supérieure. Vous pouvez poser :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,n} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a'_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Et déterminer ensuite tous les coefficients $a'_{i,j}$.

Exercice 24 - Indication. (*retour à l'exercice 24*)

1. On trouve :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Introduire la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 et écrire A à l'aide de J et I_n. Calculer J^2 et en déduire A^2.

Exercice 25 - Indication. (*retour à l'exercice 25*)

1. Calculer $aA + bI$ pour déterminer ensuite la valeur de a et de b telles que $aA + bI = A^2$.
2. *On doit trouver* $P(X) = X^2 - 3X + 2$.
3. Voir la méthode vue en cours de détermination de l'inverse à l'aide d'un polynôme annulateur.
4. Procéder par récurrence. On doit trouver : $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n \end{cases}$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
5. Montrer que $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ et vérifier que $a_1 = 1$ (on a déjà a_0. En déduire l'expression de a_n puis on trouve celle de b_n (du fait que $b_{n+1} = -2a_n$ on tire $b_n = -2a_{n-1}$).
6. Il suffit de remplacer a_n et b_n par les expressions trouvées.

Exercice 26 - Indication. (*retour à l'exercice 26*)

1. Pour calculer $A(1)$ il suffit de remplacer t par 1.
   Pour montrer que $Q \in \mathcal{E}$, il suffit de déterminer le réel t tel que $Q = A(t)$.

2. Il suffit de calculer $A(s) \times A(t)$ et de constater que c'est de la forme $A(u)$ avec $u = s + t + 2st$.
   Pour montrer que $A(s)$ et $A(t)$ commutent, on peut faire le calcul $A(t) \times A(s)$, mais c'est un peu maladroit car on sait que le résultat sera $A(t + s + 2ts)$ (on échange t et s).

3. (a) Vous pouvez trouver une matrice avec un seul coefficient non nul. **Attention :** X est une matrice colonne d'ordre 3.
   Raisonner par l'absurde : supposer Q inversible et prouver que $X = 0$: absurde. Pourquoi est-ce absurde ?
   (b) Remarquez que $I_3 = A(r)$ pour une valeur r que vous déterminerez. Il vous suffit alors de trouver une valeur s telle que $A(t)A(s) = A(r)$.

4. $S \in \mathcal{E}$ donc $S = A(s)$ où s est un réel à déterminer.
   Vous cherchez donc le(s) réel(s) s tel que $A(s)A(s) = A\left(-\frac{3}{2}\right)$.

5. (a) Procéder par récurrence. En posant $\mathscr{P}(n)$: « Il existe un réel t_n tel que $J^n = A(t_n)$ ».
   (b) La formule de récurrence de (t_n) a du être trouvée dans la récurrence.
   Vous devez trouver que $t_0 = 0$ *et* $t_{n+1} = -1 + 3t_n$
   (c) Reconnaître à quelle famille de suites appartient la suite (t_n) et déterminer l'expression de t_n.
   Calculer alors $A(t_n)$ en simplifiant au maximum.
   Vous devez trouver $J^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n+1) & \frac{1}{2}(3^n-1) & 0 \\ \frac{1}{2}(3^n-1) & \frac{1}{2}(3^n+1) & 0 \\ \frac{1}{2}(3^n-1) & -\frac{1}{2}(3^n-1) & 3^n \end{pmatrix}$

5 Solutions

Retrouvez les corrections d'autres exercices de cette feuille ici.

Exercice 1 - Correction. (*retour à l'exercice 1*)
Il suffit de véfifier avec Scilab !

Exercice 6 - Correction. (*retour à l'exercice 6*)

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $M^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$,

Exercice 7 - Correction. (*retour à l'exercice 7*)
On cherche T de la forme $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $T^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$. Donc $a^2 = 1$, $c^2 = 1$ et $b(a+c) = 0$. Soit $a = 1$ et $c = 1$ et donc $b = 0$, soit $a = 1$ et $c = -1$ et b peut prendre n'importe quelle valeur. Soit $a = -1$ et $c = -1$ et donc $b = 0$ soit $a = -1$ et $c = 1$ et b peut prendre n'importe qu'elle valeur. L'ensemble solution est donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall b \in \mathbb{K} \right\}$

Exercice 12 - Correction. (*retour à l'exercice 12*)

Correction très partielle

1. On trouver $J^2 = nJ$ (mais il faut le justifier par un schéma du produit).
2. Par une récurrence **sur** m (et pas sur n), on prouve que $J^m = n^{m-1}J$.

Exercice 13 - Correction. (*retour à l'exercice 13*)

1. ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t{}^tA = {}^tAA$. Donc ${}^tAA$ est symétrique.
2. $$\begin{aligned} {}^t({}^tAX + XA) &= {}^t({}^tAX) + {}^t(XA) \\ &= {}^tX\,{}^t{}^tA + {}^tA\,{}^tX \\ &= XA + {}^tAX \quad \text{car } X \text{ est symétrique} \\ &= {}^tAX + XA. \end{aligned}$$
   Donc ${}^tAX + XA$ est symétrique.
3. $$\begin{aligned} transp({}^tAX + XA) &= {}^t({}^tAX) + {}^t(XA) \\ &= {}^tX\,{}^t{}^tA + {}^tA\,{}^tX \\ &= -XA - {}^tAX \quad \text{car } X \text{ est antisymétrique} \\ &= -({}^tAX + XA). \end{aligned}$$
   Donc ${}^tAX + XA$ est antisymétrique.

Exercice 16 - Correction. (*retour à l'exercice 16*)
On calcule A^2 et A^3 et on a bien $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$. Donc $A(-A^2 + A + I_3) = I_3$ et donc A est inversible et $A^{-1} = -A^2 + A + I_3$.

Exercice 18 - Correction. (*retour à l'exercice 18*)

1. Si A est inversible, alors A^{-1} existe et en multipliant par A^{-1} à gauche l'égalité $AB = 0$, on obtient $B = 0$ ce qui est absurde. De même si B est inversible en multipliant par B^{-1} à droite.

2. On met C en facteur et on obtient $C(\mathrm{I}_n + C) = 0$. Si $C = 0$ alors C n'est pas inversible. Si $C = -\mathrm{I}_n$ alors C est inversible. Si $C \neq 0$ et $C \neq -\mathrm{I}_n$ alors d'après la question précédente, C n'est pas inversible.

Exercice 19 - Correction. (*retour à l'exercice 19*)

On tente de résoudre les systèmes $AX = 0$ et $BY = 0$ et on voit que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont solutions donc A et B ne sont pas inversibles.

Exercice 21 - Correction. (*retour à l'exercice 21*)
On remarque que $(A - I_n)(B - I_n) = I_n$ donc $(B - I_n)(A - I_n) = I_n$ et ainsi $AB = BA$ en développant.

Exercice 20 - Correction. (*retour à l'exercice 20*)

1. Il suffit de faire le calcul :
$$AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + 8v_n \\ 2u_n + v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$
On a alors, $X_n = A^n X_0$.

2. (a) $2 \times 1 - 1 \times (-2) = 4 \neq 0$ donc P est inversible et on a : $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On a alors :
$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
(b) On procède par récurrence : On pose $\mathcal{P}(n)$:« $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
Initialisation : $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie aussi.
$$PD^{n+1}P^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = A^nPDP^{-1}$$

Or

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = D &\iff PP^{-1}AP = PD \\ &\iff AP = PD \\ &\iff APP^{-1} = PDP^{-1} \\ &\iff A = PDP^{-1} \end{aligned}$$

D'où : $A^nPDP^{-1} = A^nA = A^{n+1}$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par récurrence, pour tout entier n on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

(c) D étant diagonale, on a : $D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 2 \times 5^n \\ -(-3)^n & 2 \times (-3)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times 5^n + 2 \times (-3)^n & 4 \times 5^n - 4 \times (-3)^n \\ 5^n - (-3)^n & 2 \times 5^n + 2 \times (-3)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5^n + (-3)^n}{2} & 5^n - (-3)^n \\ \frac{5^n - (-3)^n}{4} & \frac{5^n + (-3)^n}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} X_n = A^nX_0 &= \begin{pmatrix} \frac{5^n + (-3)^n}{2} & 5^n - (-3)^n \\ \frac{5^n - (-3)^n}{4} & \frac{5^n + (-3)^n}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5^n + (-3)^n + 5^n - (-3)^n \\ \frac{5^n - (-3)^n}{2} + \frac{5^n + (-3)^n}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 5^n \\ 5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2 \times 5^n$ et $v_n = 5^n$.

Exercice 26 - Correction. (*retour à l'exercice 26*)

1. $A(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
   $Q = A\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $Q \in \mathcal{E}$.

2.
$$\begin{aligned}
A(s)A(t) &= \begin{pmatrix} 1-s & -s & 0 \\ -s & 1-s & 0 \\ -s & s & 1-2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-s)(1-t)+st & (1-s)(-t)-s(1-t) & 0 \\ -s(1-t)+(1-s)(-t) & -s(-t)+(1-s)(1-t) & 0 \\ -s(1-t)+s(-t)+(1-2s)(-t) & -s(-t)+s(1-t)+(1-2s)t & (1-2s)(1-2t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-s-t+st+st & -t+st-s+st & 0 \\ -s+st-t+st & st+1-s-t+st & 0 \\ -s+st-st-t+2st & st+s-st+t-2st & 1-2s-2t+4st \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-(s+t-2st) & -(s+t-2st) & 0 \\ -(s+t-2st) & 1-(s+t-2st) & 0 \\ -(s+t-2st) & s+t-2st & 1-2(s+t-2st) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$
   $= A(s+t-2st)$

   Donc $A(s)A(t) \in \mathcal{E}$ et $\boxed{A(s)A(t) = A(s+t-2st)}$.
   On a donc, de même, : $A(t)A(s) = A(t+s-2ts)$ or $t+s-2ts = s+t-2st$ donc $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Donc $A(s)$ et $A(t)$ commutent.

3. (a) On pose $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors $QX = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Supposons que Q soit inversible. On a alors $Q^{-1}QX = I_3X = X$ d'une part et, d'autre part $Q^{-1}QX = Q^{-1}0 = 0$ donc $X = 0$ absurde car $X \neq 0$.

   Remarque : ici le "0" désigne la matrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Donc Q n'est pas inversible.

   (b) Soit $t \neq \frac{1}{2}$.
   On remarque que $I_3 = A(0)$. On cherche une valeur s telle que $A(t)A(s) = A(0)$ c'est-à-dire telle que $s+t-2st = 0$.
   Or

$$\begin{aligned}
s+t-2st = 0 &\iff s(1-2t)+t = 0 \\
&\iff s(1-2t) = -t \\
= &\iff s = -\frac{t}{1-2t} \quad \text{car } 1-2t \neq 0 \text{ car } t \neq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{A(t) \text{ est inversible et } \boxed{A(t)^{-1} = A\left(-\frac{t}{1-2t}\right)}.}$

4. On cherche une matrice $S \in \mathcal{E}$ telle que $S^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right)$.
Or $S \in \mathcal{E} \iff S = A(x)$, où $x \in \mathbb{R}$.
Et alors :

$$\begin{aligned}
& S^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right) \\
\iff & S \times S = A\left(-\frac{3}{2}\right) \\
\iff & A(x)A(x) = A\left(-\frac{3}{2}\right) \\
\iff & A(x + x - 2x^2) = A\left(-\frac{3}{2}\right) \\
\iff & A(2x - 2x^2) = A\left(-\frac{3}{2}\right) \\
\iff & 2x - 2x^2 = -\frac{3}{2} \\
\iff & 2x^2 - 2x - \frac{3}{2} = 0 \\
& \Delta = 4 - 4 \times 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\
& \quad = 16 > 0 \text{ donc il y a deux solutions réelles distinctes.} \\
& x = \frac{2-4}{4} = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{2+4}{4} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Il existe donc deux matrices $S \in \mathcal{E}$ telles que $S^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right)$ qui sont :

$$\boxed{S = A\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ et } S = A\left(\frac{3}{2}\right).}$$

5. On a $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
On va procéder par récurrence.
On note $\mathscr{P}(n)$ la propriété « $J^n = A(t_n)$. »
Initialisation $(n = 0)$
$J^0 = I_3$ or $I_3 = A(0)$ donc on a bien $J^0 = A(t_0)$ avec $t_0 = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
$J^{n+1} = J \times J^n$
or $J = A(-1)$ et $J^n = A(t_n)$ par hypothèse de récurrence.
Donc $J^{n+1} = A(-1)A(t_n) = A(-1 + t_n - 2 \times (-1) \times t_n) = A(-1 + 3t_n)$
On a donc bien $J^{n+1} = A(t_{n+1})$ avec $t_{n+1} = -1 + 3t_n$.
$\mathscr{P}(n+1)$ est bien vraie.
Conclusion : par récurrence, pour tout entier n, il existe un entier t_n tel que $J^n = A(t_n)$.

Lors de la démonstration par récurrence, on a déterminé que $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = -1 + 3t_n$ (et $t_0 = 0$).

(b) On reconnait en (t_n) une suite arithmético-géométrique.
On résout l'équation associée : $x = -1 + 3x \iff x = \frac{1}{2}$.
On pose alors $u_n = t_n - \frac{1}{2}$. Montrons que (u_n) est géométrique.
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = t_{n+1} - \frac{1}{2} = -1 + 3t_n - \frac{1}{2} = -1 + 3(u_n + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 3u_n + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 3u_n$.
(u_n) étant géométrique de raison 3, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times 3^n$.
Or $u_0 = t_0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.
Donc $u_n = -\frac{1}{2} \times 3^n$.
Et finalement : $t_n = u_n + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times 3^n + \frac{1}{2}$.

On a finalement :

$$J^n = A(t_n) = A\left(-\frac{1}{2}\times 3^n + \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1-\left(-\frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}\right) & -\left(-\frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}\right) & 0 \\ -\left(-\frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}\right) & 1-\left(-\frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}\right) & 0 \\ -\left(-\frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}\right) & -\frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2} & 1-2\left(-\frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\times 3^n-\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\times 3^n+\frac{1}{2} & 3^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n+1) & \frac{1}{2}(3^n-1) & 0 \\ \frac{1}{2}(3^n-1) & \frac{1}{2}(3^n+1) & 0 \\ \frac{1}{2}(3^n-1) & -\frac{1}{2}(3^n-1) & 3^n \end{pmatrix}$$