Chapitre 6

Matrices à coefficients réels ou complexes

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices rectangulaires

1.1 Définitions

Définition 1. (Matrice rectangulaire)
Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
On appelle **matrice à n lignes et p colonnes** à coefficient dans $\mathbb{K}$ tout tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ comportant n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{n,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

$a_{i,j}$ est le coefficient situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne.
On la note aussi $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et on dit que $a_{i,j}$ est le terme (ou coefficient) d'indice (i,j) de A.

Remarque. On dit aussi que A est une matrice (n,p) ou une matrice de taille (n,p)

Remarque. Voici la façon de créer une matrice avec Scilab :

```
--> A=[1 2 -1 ; 0 1 -1 ; 1 -2 0 ; 2 0 3]
 A  =

   1.   2.  -1.
   0.   1.  -1.
   1.  -2.   0.
   2.   0.   3.
```

Exemple 1.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $(2,3)$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & e^2 \\ -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2019 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $(4,2)$
- $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $(2,2)$ (matrice carrée d'ordre 2)
- $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $(1,4)$ (matrice ligne d'ordre 4)

- $E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $(4,1)$ (matrice colonne d'ordre 4)

Définition 2. (Notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Et donc :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de taille (n,p).
- $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
  Remarque : $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ se note plus simplement $\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K})$
- $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices lignes d'ordre p.
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices colonnes d'ordre n.

Exemple 2.
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -3 & 0 \\ 7 & 1 & \pi & 6 \\ -1 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \quad , \quad a_{1,4} = 0 \quad , \quad a_{2,3} = \pi \quad , \quad a_{3,2} = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} i & 10 \\ 7 & 1 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3+4i \end{pmatrix}$$

$$B \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{C}) \quad , \quad b_{1,2} = 10 \quad , \quad b_{2,1} = 7 \quad , \quad b_{3,2} = 2$$

Définition 3. (Matrice nulle de taille (n,p))
On appelle matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note $0_{n,p}$, ou tout simplement 0 quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple 3.

$$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. Voici la façon de créer une matrice nulle avec Scilab :

```
--> zeros(3,2)
 ans  =

   0.   0.
   0.   0.
   0.   0.
```

1.2 Somme de matrices et multiplication par un scalaire

1.2.1 Addition de matrices de même taille

Définition 4. (Addition de matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **somme de A et B** la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ notée $A+B$ définie par :

$$A + B = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \text{ où } c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \text{ pour tout } i \in [\![1,n]\!] \text{ et } j \in [\![1,p]\!]$$

Exemple 4.

- $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 7 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 24 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} =$ Calcul impossible ! Les matrices n'ont pas la même taille !

1.2.2 Multiplication par un scalaire

Définition 5. (Multiplication par un scalaire)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit la matrice $\lambda \cdot A$ (ou $\lambda \times A$, ou plus simplement λA) par :

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$$

Exemple 5.

$$3 \times \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{7} \\ -3 & \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & \frac{3}{7} \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$ On multiplie chaque coefficient.

Attention ! On n'écrit jamais $A \times \lambda$, ni $\dfrac{A}{\lambda}$! La division par λ se fera en multipliant par $\dfrac{1}{\lambda}$.

1.2.3 Propriétés de calcul

Proposition 1. (Propriétés de calcul) (admis)
Soient A, B, C trois éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$.

1. $A + B = B + A \quad ; \quad 0 + A = A = A + 0 \quad ; \quad A + (-A) = A - A = 0$
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \quad ; \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad ; \quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \lambda\mu A$
3. $\lambda A = 0 \iff \lambda = 0$ ou $A = 0$

On retrouve donc exactement les mêmes règles de calcul qu'avec les vecteurs !

1.3 Produit de deux matrices compatibles

Définition 6. (Produit de deux matrices)
Soient n, p et m trois entiers non nuls. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$.
On appelle alors **produit de A par B** la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ notée AB ou $A \times B$ définie par :

$$A \times B = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \text{ où } , \forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, m]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

Explication :

- Pour savoir si le produit est possible, on regarde la taille des matrices : $(n, p) \times (p, m) \to (n, m)$. Il faut que les indices au milieu soient les même, puis les indices extérieurs donnent la taille de la matrice finale.

- Pour calculer le coefficient à la i-ième ligne et à la j-ième colonne du produit, on multiplie la i-ième ligne de la première matrice avec la j-ième colonne de la seconde comme un produit scalaire de deux vecteurs :

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dots & b_{1,j} & \dots \\ \dots & b_{2,j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{p,j} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{i,j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Exemple 6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times (-3) + (-1) \times 1 & 1 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) \times 2 \\ 0 \times (-1) + 1 \times (-3) + (-1) \times 1 & 0 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times 2 \\ 1 \times (-1) + (-2) \times (-3) + 0 \times 1 & 1 \times 1 + (-2) \times 1 + 0 \times 2 \\ 2 \times (-1) + 0 \times (-3) + 3 \times 1 & 2 \times 1 + 0 \times 1 + 3 \times 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -4 & -1 \\ 5 & -1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Remarque. Si on essaie d'intervertir les deux matrices ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{Calcul impossible ! (tailles incompatibles)}$$

Exercice de cours 1. (*Voir la correction*)
Calculer AB et BA si c'est possible.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Remarque. Pour multiplier deux matrices à la main, il vaut donc mieux les écrire l'une à côté de l'autre.

Attention ! On remarque que $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$. La règle du produit nul ne s'applique pas à un produit de matrices !
Dans la question 4 de l'exercice 1 ci-dessus, on a en effet deux matrices A et B non nulles telles que $AB = 0$ (et $BA \neq 0$...)

Attention ! L'ordre d'écriture du produit est important car même si les deux produits AB et BA sont possibles, en général $AB \neq BA$.

Exercice de cours 2. (*Voir la correction*)
Calculer AC et BC. Que remarque-t-on ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Attention !

$$B = C \implies AB = AC \quad \text{mais} \quad AB = AC \;\not\Longrightarrow\; B = C.$$

Définition 7. (Matrices qui commutent)
On dit que deux matrices A et B commutent si :

- Les produits AB et BA existent
- $AB = BA$

Exercice de cours 3.
Vérifier que les matrices A et B définies ci-dessous commutent.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposition 2. (Propriétés de calcul) (admis)
Soient A, B et C des matrices de taille adéquate et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $(AB)C = A(BC) = ABC$
2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$
3. $(A+B)C = AC + BC$ et $C(A+B) = CA + CB$

1.4 Transposée d'une matrice

Définition 8. (Transposée d'une matrice)
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle matrice transposée de A la matrice notée ${}^{t}A$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont le terme d'indice (k,ℓ) est $a_{\ell,k}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ et } {}^{t}A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

La i-ème ligne de A est en fait la i-ème colonne de ${}^{t}A$.

Exemple 7.

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Alors : ${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Proposition 3. (Transposée et calculs) (admis) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

1. ${}^{t}(A+B) = {}^{t}A + {}^{t}B$
2. ${}^{t}({}^{t}A) = A$
3. ${}^{t}(\lambda A) = \lambda\, {}^{t}A$
4. ${}^{t}(AB) = {}^{t}B\, {}^{t}A$

Attention ! La dernière de ces égalités est très importante !

2 Matrices carrées

2.1 Définition

On a déjà défini les matrices carrées comme étant les matrices ayant autant de lignes que de colonnes. Ce sont les seules matrices que l'on peut multiplier par elles mêmes.

Proposition 4. (Mise au carré d'une matrice) (admis) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$AA \text{ existe si et seulement si } n = p.$$

On note alors : $AA = A^2$. Autrement dit : seules les matrices carrées peuvent s'élever au carré...

Définition 9. (Diagonale d'une matrice carrée)
On appelle diagonale d'une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ les coefficients $(a_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$

Remarque. sur Scilab, on peut facilement récupérer la diagonale d'une matrice carrée :

```
--> A
 A  =

   2.  -3.
  -2.   3.


--> diag(A)
 ans  =

   2.
   3.
```

2.2 Matrice identité et puissances d'une matrice carrée

2.2.1 Matrice identité

Définition 10. (Matrice identité)
La matrice identité (ou unité) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice avec des 1 sur toute sa diagonale et des 0 ailleurs. On la note I_n :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 5. (Propriété fondamentale de I_n) (admis)
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$AI_n = I_n A = A.$$

Autrement dit : la matrice I_n a pour les matrices carrées d'ordre n le même rôle que le 1 pour la multiplication des nombres. D'où son autre nom de *matrice unité*.
En particulier : **la matrice unité commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.**

Remarque. sur Scilab, on peut facilement créer la matrice identité :

```
--> eye(6,6)
 ans  =

   1.   0.   0.   0.   0.   0.
   0.   1.   0.   0.   0.   0.
   0.   0.   1.   0.   0.   0.
   0.   0.   0.   1.   0.   0.
   0.   0.   0.   0.   1.   0.
   0.   0.   0.   0.   0.   1.
```

2.2.2 Puissances d'une matrice carrée

Définition 11. (Puissances d'une matrice carrée)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et k un entier naturel. On définit :

- $A^0 = I_n$,
- $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Exercice de cours 4. (*Voir la correction*)
Calculer A^2 avec $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Attention ! On n'élève pas une matrice au carré en élevant ses coefficients au carré !

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 \neq \begin{pmatrix} (-1)^2 & (-1)^2 \\ 2^2 & 3^2 \end{pmatrix}$$

Sauf pour les matrices diagonales (voir proposition 7)

Attention ! En général, $(AB)^n \neq A^n B^n$, sauf si A et B commutent !

$$(AB)^n = \overbrace{AB \cdot AB \cdots AB}^{n \text{ fois}} \text{ et c'est tout ce qu'on peut dire !}$$

2.2.3 Formule du binôme de Newton

Proposition 6. (Formule du binôme pour les matrices) (admis)
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **telle que** $AB = BA$. On a, pour tout entier $n \geq 0$:

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Attention ! Cette formule est fausse si $AB \neq BA$!

Exercice de cours 5. (*Voir la correction*)

Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice N telle que $A = N + 2I_3$.
2. Vérifier que $N^3 = 0$ (on dit que N est nilpotente).
3. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

2.3 Matrices carrées particulières

2.3.1 matrices diagonales

Définition 12. (Matrices diagonales)
On appelle **matrice diagonale d'ordre** n une matrice de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix}$$

où les coefficients $d_{i,i}$ peuvent éventuellement être nuls.

Les matrices diagonales sont très faciles multiplier entre elles, ce qui les rends, entre autre, particulièrement intéressantes :

Proposition 7. (Produit de matrices diagonales) (admis)
Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale. Plus précisément, si :

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \quad D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

Alors :

$$D_1 D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Attention ! Il n'y a que dans le cas de matrices diagonales qu'on peut multiplier coefficient à coefficient !

On en déduit immédiatement les deux résultat suivants :

Proposition 8. (Commutation des matrices diagonales) (admis)
Soient D_1 et D_2 deux matrices diagonales de même ordre. On a alors $D_1 D_2 = D_2 D_1$.

Proposition 9. (Puissances d'une matrice diagonale) (admis)
Soit D une matrice diagonale d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix}$$

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$D^k = \begin{pmatrix} d_{1,1}^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2}^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n,n}^n \end{pmatrix}$$

Exercice de cours 6.
Calculer AB et BA, A^2 et B^3 avec A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2.3.2 Matrices triangulaires

Définition 13. (Matrices triangulaires supérieures et inférieures)
Une matrice carrée $T = (t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) lorsque $t_{i,j} = 0$ dès que $i > j$ (resp. $i < j$).

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix} \qquad (\text{resp.} T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ t_{n,1} & \dots & t_{n,n-1} & t_{n,n} \end{pmatrix})$$

Proposition 10. (Produit de matrices triangulaires) (admis)
Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure), dont la diagonale est le produit terme à terme des diagonales des matrices de départ.

Exemple 8.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \implies AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 24 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

2.3.3 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 14. (Matrices symétrique et antisymétriques)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique si $\forall i,j \in [\![1,n\ ;\ ,]\!]\ a_{i,j} = a_{j,i}$. Autrement dit si ${}^tA = A$.
Elle est dite antisymétrique si $\forall i,j \in [\![1,n\ ;\ ,]\!]\ a_{i,j} = -a_{j,i}$. Autrement dit si ${}^tA = -A$.

Exemple 9.

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \pi & -4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique
- $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique

Remarque. La diagonale d'une matrice antisymétrique est toujours nulle.

2.4 Matrices carrées inversibles

2.4.1 Définition

Dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$) l'inverse d'un nombre $x \neq 0$ est le nombre y tel que $xy = 1$. On le note $y = x^{-1}$. On définit exactement de la même manière l'inverse d'une matrice. Mais, alors que dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ tout nombre non nul possède un inverse, il n'en n'est pas de même dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Définition 15. (matrice inversible, inverse d'une matrice, ensemble des matrices inversibles)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite **inversible** si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $AB = BA = I_n$.
Dans ce cas, on peut prouver que B est unique, on l'appelle alors **inverse de** A et on la note A^{-1}. On a donc toujours : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. **L'ensemble des matrices inversibles de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **se note** $GL_n(\mathbb{K})$

Proposition 11. (L'inverse à gauche est toujours l'inverse à droite et réciproquement) (admis)
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $AB = I_n$ **alors** $BA = I_n$.

Conclusion : pour démontrer que A et B sont inverses l'une de l'autre, il suffit de vérifier que $AB = I_n$, inutile alors de calculer BA.

Exemple 10.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons que A est inversible et que $A^{-1} = B$.

2.4.2 Inversibilité et inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

Proposition 12. (Inversibilité et inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$) (admis)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est inversible si et seulement si } ad - cb \neq 0.$$

Dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exercice de cours 7.
Dans chaque cas, déterminer si A est inversible et calculer son inverse le cas échéant.

1. $B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
3. $C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2.4.3 Inversibilité des matrices diagonales et triangulaires.

Proposition 13. (Inversibilité et inverse des matrices diagonales) (admis)
Une matrice diagonale est inversible si et seulement si aucun de de ses coefficients diagonaux n'est nul.
Dans ce cas, on a :

$$\begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_{1,1}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{2,2}^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{n,n}^{-1} \end{pmatrix}$$

Proposition 14. (Inversibilité et inverse des matrices triangulaire) (admis)
Une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est inversible si et seulement si aucun de de ses coefficients diagonaux n'est nul.
Dans ce cas, son inverse est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les coefficients diagonaux sont les inverses des coefficients diagonaux de départ

Exemple 11.

1. $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ n'existe pas, car la matrice de départ n'est pas inversible !

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ 0 & \frac{1}{5} & ? \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

2.4.4 Inverse et opérations

Proposition 15. (Inverse et opérations) (admis)
Soient A et B deux matrices de $GL_n(\mathbb{K})$. Alors :

- A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- ${}^tA$ est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$.

2.4.5 Détermination à partir d'un polynôme annulateur

Exemple 12. (*Voir la correction*)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 + 3A + 2I_n = 0$. (On dit que le polynôme $X^2 + 3X + 2$ annule A).
Montrons que A est inversible et donnons son inverse.

Attention ! Quand on factorise par A un terme de la forme λA, on obtient $A(\lambda I_n)$.

Exercice de cours 8. (*Voir la correction*)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 + 2A^2 - 3A + 5I_n = 0$. Montrer que A est inversible et donner son inverse.

2.4.6 Critère d'inversibilité pour les matrices d'ordre supérieur

Proposition 16. (Critère d'inversibilité) (admis)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

A est inversible si et seulement si l'équation en X, $AX = 0$ admet $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ pour unique solution.

Exemple 13. (*Voir la correction*)
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$?

3 Preuves et solutions

Solution rédigée de l'exercice de cours 1

1. $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$
2. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$ et BA n'existe pas.
3. $AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & 13 & -3 \end{pmatrix}$ et BA n'existe pas.
4. $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

(*retour à l'exercice 1*)

Solution rédigée de l'exercice de cours 2

On trouve $AC = BC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.
On remarque que $AC = BC$ et pourtant $A \neq B$!
(*retour à l'exercice 2*)

Solution rédigée de l'exercice de cours 4

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

(*retour à l'exercice 4*)

Solution rédigée de l'exercice de cours 5

1. $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Donc $N^3 = NN^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.

$$\begin{aligned}
A^n = (2I_3+N)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2I_3)^{n-k}N^k \quad \text{(toujours mettre le } k \text{ sur la matrice nilpotente)}\\
&= \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}(2I_3)^{n-k}N^k \quad \text{car } N^k = 0 \text{ pour } k \geq 3\\
&= \binom{n}{0}(2I_3)^n N^0 + \binom{n}{1}(2I_3)^{n-1}N^1 + \binom{n}{2}(2I_3)^{n-2}N^2\\
&= 2^n I_3^n + n2^{n-1}I_3^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}I_3^{n-2}N^2\\
&= 2^n I_3 + n2^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}N^2\\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & n2^{n-1}\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}\\ 0 & 2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(*retour à l'exercice 5*)

Solution rédigée de l'exemple 12

On a :

$$\begin{aligned}
& A^2 + 3A + 2I_n = 0\\
\iff & A^2 + 3A = -2I_n\\
\iff & -\frac{1}{2}A^2 - \frac{3}{2}A = I_n\\
\iff & A\left(-\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}I_n\right) = I_n
\end{aligned}$$

Ainsi, $A^{-1} = -\frac{1}{2}A - \frac{3}{2}I_n$.
(*retour à l'exemple 12*)

Solution rédigée de l'exercice de cours 8

On a :

$$\begin{aligned}
& A^3 + 2A^2 - 3A + 5I_n = 0\\
\iff & A^3 + 2A^2 - 3A = -5I_n\\
\iff & -\frac{1}{5}A^3 - \frac{2}{5}A^2 + \frac{3}{5}A = I_n\\
\iff & A\left(-\frac{1}{5}A^2 - \frac{2}{5}A + \frac{3}{5}I_n\right) = I_n
\end{aligned}$$

Ainsi, $A^{-1} = -\frac{1}{5}A^2 - \frac{2}{5}A + \frac{3}{5}I_n$.

(*retour à l'exercice 8*)

Solution rédigée de l'exemple 13

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

Or $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = -1$ est une solution du système (qui admet donc une autre solution que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$), donc $A \notin \mathcal{G}\ell_3(\mathbb{R})$.

(*retour à l'exemple 13*)