Programme de colle n°7- semaine du 9/11/20

Liste des démonstrations/Exercices à savoir refaire :

1. Exercice de cours 5
2. Question 3 de l'exemple 11 : déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.
3. Exercice 16 de la FE06.

Connaissances attendues :

Le minimum vital

Ce que vous ne pouvez pas ne pas savoir !

Sur le chapitre « sommes »

Connaître les formules suivantes :

1. **Sommes de 1 et sommes constantes** : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$; $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a = (n - p + 1) \times a$
2. **sommes des k et somme des k^2** : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

NB :

- Savoir que ces formules sont aussi valables si k part de 1 au lieu de 0.
- Savoir s'en sortir si k ne part ni de 0 ni de 1 en ajoutant les termes manquants.

3. **Sommes géométriques** : **Si $q \neq 1$** : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} = q^p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$
4. **Formule du binôme de Newton** : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

Connaître les techniques de calcul de sommes suivantes :

Savoir calculer une somme par linéarité

$$\text{Par exemple, savoir écrire } \sum_{k=0}^{n} 3k^2 - 6k + 2 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 - 6\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 2$$

Savoir reconnaître et calculer une somme télescopique

Savoir faire un changement d'indice.

Factorielle et coefficients binomiaux :

Connaître la définition de n!

Savoir, et surtout comprendre (donc savoir expliquer) par exemple que :

- $n! = n \times (n-1)!$
- $n! = n(n-1) \times (n-2)!$
- $(n+2)! = (n+2) \times (n+1)!$
- $(n+2)! = (n+2)(n+1) \times n!$
- $(n+1)! = (n+1) \times n \times (n-1)!$

Connaître la définition de $\binom{n}{k}$

Le minimum vital (suite)

Ce que vous ne pouvez toujours pas ne pas savoir !

Sur le chapitre « matrices »

Comme vous pouvez le voir, tout le chapitre sur les matrices est vital !!

Connaître les définitions/notations :

1. Savoir nommer les coefficients d'une matrice. Par exemple, savoir que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2{,}5 & \frac{1}{2} & 10 \end{pmatrix}$,alors $a_{2,3} = 4$.
2. Savoir donner la taille d'une matrice. Par exemple, savoir que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $(2,3)$.
3. Connaître et comprendre la notation $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   → Concrètement : comprendre, par exemple, ce que signifie $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ ou $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ou $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
4. Connaître la définition de la transposée d'une matrice.
   Avoir compris que, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
5. Savoir ce qu'est une matrice carrée d'ordre n, ligne d'ordre n ou colonne d'ordre n.
6. Connaître ce qu'on appelle la diagonale d'une matrice carrée.
7. Connaître les matrices « identité » I_n. Savoir donner I_2, I_3 et plus généralement I_n.
8. **Matrices carrées particulières :**
   - Savoir ce qu'est une matrice diagonale, une matrice triangulaire supérieure, une matrice triangulaire inférieure.
   - Savoir ce qu'est une matrice symétrique, une matrice antisymétrique.
9. **Matrices carrées inversibles :**
   - Savoir donner la définition d'une matrice inversible et de l'inverse d'une telle matrice.
     (une matrice A, carrée d'ordre n, est inversible qu'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$ et dans ce cas B est l'inverse de A et se note A^{-1}.
   - Savoir que si $AB = I_n$, alors B est l'inverse de A (inutile de vérifier que $BA = I_n$).

Savoir calculer avec les matrices :

1. **Opérations de base sur les matrices.**
   - Savoir additionner, soustraire deux matrices. Savoir multiplier une matrice par un scalaire.
   - Savoir multiplier deux matrices lorsque cette multiplication est possible (savoir dire si cette multiplication est possible avant de multiplier).
   - Savoir qu'en général, $AB \neq BA$. Savoir que si $AB = BA$ on dit que A et B commutent.
2. **Puissance d'une matrice carrée.**
   - Si A est une matrice carrée, savoir calculer A^2, A^3, A^4, etc.
   - Connaître la formule du binôme de Newton pour les matrices :

$$\text{Si } AB = BA, \qquad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

3. **Transposée d'une matrice**
   Connaître les règles de calcul avec la transposée :

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad ; \quad {}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA \quad ; \quad {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$$

4. **Matrice identité d'ordre n**
   Savoir calculer avec la matrice identité :
   - Savoir que pour toute matrice A carrée d'ordre n :

$$I_n A = A \quad \text{et} \quad A I_n = A$$
$$A^0 = I_n$$

   - Savoir que pour tout entier k,

$$I_n^k = I_n$$

5. **Calculer avec des matrices diagonales.**
   - Savoir que le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale et que les coefficients diagonaux de multiplient deux à deux.
   - Savoir que si A est une matrice diagonale, alors A^n est la matrice diagonale où on a élevé les termes diagonaux à la puissance n.
   - Savoir dire si une matrice diagonale est inversible et savoir donner son inverse.

6. **Calculer avec des matrices triangulaires supérieures.**
   - Savoir que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure et que les coefficients diagonaux de multiplient deux à deux. Idem avec deux matrices triangulaires inférieures.
     ➔ **Revoir l'exemple 8 et bien le comprendre.**
   - Savoir que si A est une matrice triangulaire supérieure, alors A^n est une matrice triangulaire supérieure où on a élevé les termes diagonaux à la puissance n mais que pour les coefficients au-dessus de la diagonale, on ne peut rien dire. Idem pour une triangulaire inférieure.

7. **Déterminer si une matrice est inversible, déterminer A^{-1}.**
   - Savoir déterminer si une matrice carrée d'ordre 2 est inversible et déterminer son inverse.
   - Savoir déterminer si une matrice diagonale est inversible et déterminer son inverse.
   - Savoir déterminer si une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est inversible et déterminer son inverse dans le cas d'une matrice carrée d'ordre 3 (question 3 de l'exemple 11).
   - Savoir déterminer l'inverse à partir d'un polynôme annulateur (savoir refaire l'exemple 12).
   - Savoir déterminer si une matrice A est inversible en résolvant le système $AX = 0$ (savoir refaire l' exemple 13).

8. **Règles de calcul avec l'inverse :**
   - Connaître l'inverse d'un produit :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Le « standard »

Ce que vous devriez aussi savoir.

- Inverse de la transposée est la transposée de l'inverse :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

- Deux puissances d'une même matrice commutent toujours :

$$A^2A^3 = A^3A^2 = A^5 \quad ; \quad A^nA^m = A^mA^n = A^{m+n}$$

Le « compétitif »

Si vous voulez marquer des points, il faut aussi savoir cela sans hésitation :

Savoir calculer A^n dans le cas où $A = aI_n + B$ avec B nilpotente, sans aucune indication.

Quand $P^{-1}AP = D$, savoir en déduire que A= PDP^{-1} puis que $A^n = PD^nP^{-1}$ par récurrence

Quand $X_{n+1} = AX_n$, savoir en déduire que $X_n = A^nX_0$ par récurrence.
Quand $X_{n+1} = X_nA$, savoir en déduire que $X_n = X_0A^n$ par récurrence.