Chapitre 7

Polynômes à coefficients réels ou complexes

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition

1.1 Définition des polynômes et des ensembles $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

Définition 1. (Polynôme de degré $n \geq 0$)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ (donc des réels ou des complexes) **avec** $a_n \neq 0$.
La fonction P définie sur $\mathbb{K}$ par :

$$P(X) =$$

est un **polynôme de degré** n **sur** $\mathbb{K}$. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont les **coefficients de** P.
On note alors : $\deg P = n$ et on dit que a_n **est le coefficient dominant de** P.
Si $a_n = 1$, on dit que P est un **polynôme unitaire**.

Remarque. X est appelée **l'indéterminée**. Nous verrons qu'on peut la remplacer par un nombre x mais aussi par une matrice, ou une fonction ! On ne précise donc jamais dans quel ensemble on prend l'indéterminée : on n'écrit jamais $\forall X \in \ldots$.

Remarque.

- Les polynômes de degré 0 sont appelés les **polynômes constants**.
- Les polynômes réduits à la forme $a_k X^k$ sont appelés **monômes**.

Définition 2. (polynôme nul)
On appelle **polynôme nul** la fonction nulle définie par $P(X) = 0$. On le note 0.
Par convention, le degré du polynôme nul est .... On a donc : ....

Définition 3. (Notations $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$)
On note :

- $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

Attention ! $P \in \mathbb{R}_n[X]$ signifie donc que P est un polynôme à coefficients réels de degré **inférieur ou égal** à n.

Exemple 1.

- $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des ....
- $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des ....
- $\mathbb{C}_5[X]$ est l'ensemble des ....

Attention ! $\mathbb{R}_2[X]$ n'est pas l'ensemble des polynômes de degré 2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on trouve aussi les fonctions affines qui sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

Proposition 1. (Égalité de deux polynômes)
Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont ....

Exercice de cours 1.
Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$2X^3 - 9X^2 + 14X - 15 = (X-3)(aX^2 + bX + c).$$

1.2 Création d'un polynôme dans Scilab

Il faut commencer par créer le polynôme "X" comme suit :

```
--> X=poly(0,"X")
 X  =


   X
```

Ensuite, on peut créer des polynôme de la façon suivante, assez naturelle :

```
--> A=X-3
 A  =


  -3 +X


--> B=2*X^2-3*X+5
 B  =

              2
   5 -3X +2X
```

On peut alors facilement calculer la forme développée du produit :

```
--> A*B
 ans  =

                2     3
  -15 +14X -9X   +2X
```

1.3 Opérations algébriques

Proposition 2. (Opérations algébriques sur les polynômes)
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les fonctions $x \mapsto P(x) + Q(x)$, $x \mapsto \lambda P(x)$ et $x \mapsto P(x)Q(x)$ sont encore des polynômes, qu'on note respectivement : $P + Q$, λP et PQ. On a alors :

- $(P + Q)(X) =$ ....
- $(\lambda P)(X) =$ ....
- $(PQ)(X) =$ ....

Exercice de cours 2.
Déterminer $P + Q$; λP et PQ dans les cas suivants :

1. $P(X) = X^2 + 3$, $Q(X) = 4X^3 - 3X^2 + 2$ et $\lambda = 2$.
2. $P(X) = X^4 + 1$, $Q(X) = -X^4 + 3X^3$ et $\lambda = -1$.

Proposition 3. (Propriétés de calcul)
Soient P, Q, R trois éléments de $\mathbb{K}[X]$ et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$.

1. $P + Q =$ .... ; $0 + P =$ .... ; $P + (-P) =$ ....
2. $(\lambda + \mu)P =$ .... ; $\lambda(P + Q) =$ .... ; $\lambda(\mu P) =$ ....
3. $\lambda P = 0 \iff$ ....
4. $(PQ)R =$ ....
5. $\lambda(PQ) =$ ....
6. $PQ =$ ....
7. $(P + Q)R =$ ....
8. $PQ = 0 \iff$ ....

Remarque. Autrement dit, contrairement à ce qu'on a vu avec les matrices, on calcule avec les polynômes exactement comme avec les nombres.

Proposition 4. (Degré et opérations)
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a :

1. $\deg(P + Q)$..
2. Si $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg(P + Q)$..
3. $\deg(PQ)$..

1.4 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$.

1.4.1 Division euclidienne

Théorème 5. (Division euclidienne des polynômes)
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.

....

R est appelé ....

On a alors : $\deg A =$ ....

Remarque. Avec Scilab, on calcule comme suit le quotient et le reste de la division euclidienne de deux polynômes :

```
--> A=3*X^5+4*X^2+1
 A  =


           2    5
    1 +4X  +3X



--> B=X^2+2*X+3
 B  =


              2
    3 +2X +X



--> [R,Q]=pdiv(A,B)
 Q  =


                 2    3
    16 +3X -6X  +3X


 R  =



  -47 -41X
```

Exemple 2.
Effectuons la division euclidienne de $A(X) = 3X^5 + 4X^2 + 1$ par $B(X) = X^2 + 2X + 3$

Exercice de cours 3.
Effectuer la division euclidienne de $A(X) = 2X^6 + X^4 - 5X + 5$ par $B(X) = X^3 - 2$

Exercice de cours 4.
Reprendre l'exercice 1 en utilisant une division euclidienne

Exemple 3.
Sans poser la division, effectuer la division euclidienne de $A(X) = 4X^3 - 2X^2 + 4X - 1$ par $B(X) = X^2 - 2$

Exercice de cours 5.
Reprendre l'exercice 3 sans poser la division.

Exemple 4.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X - 1$.

Exercice de cours 6.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 6X + 5$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $P(X) = X^2 - 6X + 5$ est un polynôme annulateur de A.
   (b) En déduire, à l'aide de la question 1, une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice de cours 7.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X - a$.

1.4.2 Diviseurs d'un polynôme

Définition 4. (B divise A)
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que B divise A si

....

Autrement dit : B **divise** A **si et seulement si** ....

Exemple 5.
Montrons que $6X - 12$ divise $X^3 - 8$.

Proposition 6. (propriétés de la divisibilité)

1. (divisibilité et degré) Si B divise A et que $A \neq 0$, alors ....
2. (divisibilité et polynômes constants) ....
3. Si C divise B et que B divise A alors ....

2 Dérivées et Racines

2.1 Dérivées d'un polynôme

Définition 5. (Polynôme dérivé)
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
On appelle polynôme dérivée de P, et on note P', le polynôme défini par :

$$P'(X) = \text{..}$$

Remarque.

- Si $\deg P = n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\deg P' =$ ....
- Le polynôme dérivé d'un polynôme constant est ....

Définition 6. (Dérivées successives)
On définit **la dérivée n-ième d'un polynôme** (appelé aussi le **polynôme dérivé d'ordre n**) de la façon suivante :

1. Le polynôme dérivé d'ordre 0, noté $P^{(0)}$ est le polynôme P lui-même : $P^{(0)} = P$.
2. Le polynôme dérivé d'ordre 1, noté $P^{(1)}$ est le polynôme P' : $P^{(1)} = P'$.
3. Le polynôme dérivé d'ordre 2, noté $P^{(2)}$ est le polynôme dérivé de P' : $P^{(2)} = P''$.
4. Le polynôme dérivé d'ordre 3, noté $P^{(3)}$ est le polynôme dérivé de $P^{(2)}$: $P^{(3)} = P'''$.
5. Plus généralement, le polynôme dérivé d'ordre k, noté $P^{(k)}$ est le polynôme dérivé de $P^{(k-1)}$:
$$P^{(k)} = \left((P^{(k-1)}\right)'$$
.

Exercice de cours 8.

1. Calculer les dérivées successives de $P(X) = X^4 + 2X^2 - 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées successives de X^n.

2.2 Racines

Définition 7. (Racine d'un polynôme)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est une racine de P si et seulement si ....

Théorème 7. (Théorème de D'Alembert-Gauss)
....
....

Attention ! Cette racine n'est pas forcément réelle !
Par exemple $P(X) = X^2 + 1$, polynôme à coefficient réels, n'admet pas de racine réelle.

Proposition 8. (Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

α est racine de P si et seulement si ....

Exercice de cours 9.
On pose $P(X) = X^3 - 4X^2 + 21X - 34$.

1. Montrer que 2 est la seule racine réelle de P.
2. Montrer que $X - 2$ divise P. En déduire les deux autres racines (complexes) de P.

Théorème 9. (Caractérisation d'une racine par la divisibilité)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

α est racine de P si et seulement si ....

autrement dit : ....

Théorème 10. (Généralisation)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, des éléments **2 à 2 distincts** de $\mathbb{K}$.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont racines de P si et seulement si ....

Exercice de cours 10.
Soit $P(X) = 2X^2 - 6X + 4$.
Montrer que 1 et 2 sont racines de P. Retrouver la factorisation de P.

Corollaire 11. (Nombre maximum de racines d'un polynôme) Un polynôme de degré n possède au plus .... racines.
Autrement dit :
Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et que P admet $n+1$ racines, alors ....
En particulier : le seul polynôme qui admet une infinité de racine est ....

Exercice de cours 11.
Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(0) = Q(0)$, $P(1) = Q(1)$ et $P(2) = Q(2)$. Montrer que $P = Q$.

2.3 Racines multiples

Définition 8. (Racine d'ordre k)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
On dit que α est une racine d'ordre k de P si et seulement si ....

....

Autrement dit, ssi :

....

k est alors appelé **ordre de multiplicité de α.**

Remarque. Cas particuliers :

- Une racine d'ordre 1 est appelée **racine simple**
- Une racine d'ordre 2 est appelée **racine double**
- etc...

Exemple 6. Le trinôme à coefficients réels
Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **Si** $\Delta > 0$
  - P admet ....
  - et P se factorise dans $\mathbb{R}$ en : ....
-
- **Si** $\Delta = 0$
  - P admet ....
  - et P se factorise dans $\mathbb{R}$ en : ....
- **Si** $\Delta < 0$
  - ....
  - P admet ....
  - et P se factorise dans $\mathbb{C}$ en : ....

Théorème 12. (critère de multiplicité d'une racine)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
α est une racine d'ordre k de P si et seulement si ....
En particulier :

- α est racine simple ssi ....
- α est racine double ssi ....
- α est racine au moins double ssi ....

Exercice de cours 12.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et P le polynôme défini par :

$$P(X) = X^{2n} + nX^{2n-1} - (2n+1)X^n + n.$$

1. Vérifier que 1 est racine de P.
2. Déterminer son ordre de multiplicité.

3 Exemples de factorisation

Exemple 7.
Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 3X - 2$.

Exemple 8.
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $Q(X) = X^4 + X^2 + 1$.

Exercice de cours 13.
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$.

Exercice de cours 14.
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4 - X^2 + 1$. En déduire, en utilisant le résultat de l'exemple 8, la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ de $P = X^8 + X^4 + 1$.