Feuille d'exercices n° 7 - Polynômes

1 Exercices

1.1 Exercices de base

Exercice 1.
Soient $P(X) = X^2 + 3X - 2$ et $Q(X) = 6X - X^2 + 1$. Déterminer $P + Q,\ 3P - 2Q,\ P^3,\ PQ$ et $P(Q(X))$.

Exercice 2.
Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1. $P_1(X) = X^3 - (X - 2 + i)^2$
2. $P_2(X) = X^3 - X(X - 2 + i)^2$
3. $P_3(X) = (X + 1)^n - (X - 1)^n$, où $n \in \mathbb{N}$
4. $P_4(X) = \prod_{k=1}^{n} \left(2X^k - k\right)$, où $n \in \mathbb{N}^*$
5. $P_5(X) = (X + 1)^{2020} - (4X^2 + aX)^{1010}$, où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ on définit $f(P) = P(X + 1) - P(X)$.
Calculer $f(X^3)$, $f(X^2)$, $f(X)$ et $f(1)$ puis montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4.

1. Trouver les polynômes $P \in R_1[X]$ tels que $P(-1) = -2$ et $P(0) = 1$.
2. Trouver les polynômes $P \in R_2[X]$ tels que $P(-1) = -2$ et $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.

Exercice 5.
Effectuer les divisions euclidiennes suivantes dans $R[X]$.

1. $X^3 + 1$ par $X^2 + X + 1$,
2. $2X^5 + X^3 + 17X - 2$ par $X^2 + 2X + 3$.

Exercice 6. (*Voir la correction ici*)
Effectuer la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B.

1. $A = X^3 - 3X^2$, $B = X^2 - X + 2$
2. $A = -16X^4 - 64X^2 - X - 100$, $B = 4X^2 + 4X + 10$
3. $A = X^4 + 6X^2 - 2X + 5$, $B = X^3 - X^2 + 4X - 4$
4. $A = X^3 + iX^2 + X$, $B = X - i + 1$
5. $A = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + X$, $B = (X - 1)^2$

Exercice 7. (pour s'entrainer chez soi)
Effectuer la division euclidienne de A par B

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1, B = X^2 + 2X + 3$
2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1, B = X^3 + X + 2$
3. $A = X^4 - X^3 + X - 2, B = X^2 - 2X + 4$
4. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9, B = X^2 - 5X + 4$

Exercice 8. (pour s'entrainer chez soi)
Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B :

1. $A = X^n, B = X^2 - 5X + 6$
2. $A = X^n, B = X^2 + 4X + 4$
3. $A = (X + 1)^n - X^n - 1, B = X^2 - 3X + 2$
4. $A = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2, B = (X - 3)(X - 2)$
5. $A = (X - 3)^{2n} + (X - 2)^n - 2, B = (X - 2)^2$

Exercice 9.
Soit $P = -3X^2 + 6X - 6$. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 10.
Soit $P = 2X^3 - 2X^2 - 28X + 48$. Montrer que 2 est racine de P puis factoriser (au maximum) P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 11.
Montrer que -1 est racine triple de $P = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 2$ et factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 12. (*Voir la correction ici*)
Soit le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^3 - 11X^2 + 12X + 36$; sachant qu'il a deux racines multiples, donner sa factorisation.

Exercice 13. (pour s'entrainer chez soi)
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P(X) = X^3 + X - 10$ sachant qu'il a une racine "simple"
2. $P(X) = X^4 + 6X^3 - 4X^2 - 6X + 3$ sachant qu'il a deux racines "simples"
3. $P(X) = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ sachant que i est racine

Exercice 14. (pour s'entrainer chez soi)
Déterminer la multiplicité de la racine α pour les polynômes suivants :

1. $\alpha = 2, P(X) = X^{n+2} - 4X^{n+1} + 4X^n$
2. $\alpha = 3, P(X) = X^3 - 3X^2 - 9X + 27$
3. $\alpha = 2,\ P(X) = nX^{n+2} - (4n + 1)X^{n+1} + 4(n + 1)X^n - 4X^{n-1}$

Exercice 15. (pour s'entrainer chez soi)
Déterminer les polynômes P vérifiant les conditions suivantes :

1. $\deg P \leq 2,\ P(0) = 1, P(1) = 3$ et $P(2) = 7$
2. $\deg P \leq 2,\ P(0) = -12,\ P(4) = 12$ et 1 est racine de P
3. 1 est racine double de P où P s'écrit sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} X^{k+2} + aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.

1.2 exercices d'entrainement

Exercice 16.
On conisdère la suite $(T_n)_n \in \mathbb{N}$ de polynômes définie par :

$$\begin{cases} T_0 = 1,\ T_1 = 2X, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n. \end{cases}$$

1. Calculer T_3 et T_4.
2. Démontrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg T_n = n$ et le coefficient dominant de T_n est 2^n.

Exercice 17.

1. Soit R le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)(X-2)$. Que dire du degré de R ? Déterminer $R(1)$ et $R(2)$ puis en déduire R.
2. Soit R le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$. Que dire du degré de R ? Déterminer $R(1)$ et $R'(1)$ puis en déduire R.

Exercice 18.
On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 - 6A + 9I_2 = 0$
2. En effectuant la division euclidienne de X^n par un polynôme bien choisi, déterminer une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19.
Soit $P \in R_2[X]$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\cos t) = 0$. Montrer que $P = 0$.

Exercice 20. (pour s'entrainer chez soi) (*Voir la correction ici*)
Soit P un polynôme tel que pour tout réel x, $P(x) = P(\sin x)$. Que peut-on dire de P ?

Exercice 21.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$.

1. On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$.
2. En déduire que P est constant.

Exercice 22. (*Voir l'indication ici*)
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$: $P = X^3 + 3X^2 - 5X + 1$, $Q = X^4 + 1$, $R = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

1.3 exercices d'approfondissement

Exercice 23. $(*)$ (*Voir la correction ici*)
Pour $n \geq 1$, notons $P_n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Vérifier que P_n n'a pas de racine multiple.

Exercice 24. $(***)$ (*Voir la correction ici*)
Soit $n \geq 1$, on considère l'application $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X^2-1)P' - (nX+1)P$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer que $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$. Montrer que P ne peut avoir d'autres racines complexes que 1 et -1. En déduire les valeurs possibles pour λ.

Exercice 25. $(***)$ (*Voir la correction ici*)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on suppose qu'il existe $b, c \in \mathbb{C}$ tels que $A^2 + bA + cI_n = 0$. Pour tout entier $m \geq 2$, déduisez en une expression de A^m en fonction des matrices A et I_n (on pourra d'abord traiter le cas où un certain polynôme a deux racines simples, puis le cas où il a une racine double).
En considérant la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, retrouvez l'expression pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Exercice 26. $(***)$ (*Voir la correction ici*)
On considère la suite de polynômes définie par

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = -2X \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n \end{cases}$$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est une polynôme de degré n. Déterminez le coefficient dominant de P_n.
2. Déterminez le coefficient constant de P_n.
3. Déterminez une relation entre $P_n(x)$ et $P_n(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Déduisez en la parité de P_n.

1.4 exercices d'entrainement supplémentaires

Exercice 27. (★★)
On définit l'application φ comme suit :

$$\varphi \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP(X+2) - P(X^2) \end{cases}$$

On considère un polynôme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. Déterminer $\varphi(P)$.

Exercice 28. (★★)

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3x + 2$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 6x + 9$.

Exercice 29. (★★)
On définit la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 2}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de f en 2^+ et en 2^-.
   On commencera par donner le tableau de signes de $x - 2$.
3. Déterminer le tableau de variations de f ainsi que son tableau de signes.
4. (a) Écrire la division euclidienne de $x^2 + x - 12$ par $x - 2$.
   (b) En déduire une nouvelle expression de f.
   (c) Déduire de cette expression une fonction affine h telle que
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) - h(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) - h(x) = 0.$$
   (d) Comment cela se traduit-il graphiquement ?
5. Tracer le plus soigneusement possible l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 30. (★★)
On définit l'application ψ par :

$$\psi \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2P + (X-1)P' \end{array} \right. .$$

1. Calculer $\psi\left(3X^2 - 2X + 5\right)$ et $\psi\Big(\psi\left(3X^2 - 2X + 5\right)\Big)$.
2. (a) Calculer $\psi(X^2)$, $\psi(X)$ et $\psi(1)$.
   (b) On définit la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le 3}$ où $a_{i,j}$ est le coefficient de X^{i-1} dans $\psi\left(X^{j-1}\right)$.
   Par exemple :
   - $a_{1,2}$ est le coefficient de 1 dans $\psi(X)$
   - $a_{2,2}$ est le coefficient de X dans $\psi(X)$,
   - $a_{3,2}$ est le coefficient de X^2 dans $\psi(X)$
   - $a_{2,3}$ est le coefficient de X dans $\psi(X^2)$

   Donner la matrice A et calculer A^2.
3. Calculer $A \times \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A^2 \times \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Que remarque-t-on ?
4. (a) Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
   (b) On note $Q = aX^2 + bX + c$ où a, b, c sont les réels tels que : $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   Déterminer Q.
   (c) Sans aucun calcul, trouverez-vous $\psi(Q)$?
5. **Généralisation (EML 2019)**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit l'application ψ_a par :
   $$\psi_a \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2P + (X-a)P' \end{array} \right. .$$
   (a) Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\psi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

(b) Calculer $\psi(1)$, $\psi(X)$, $\psi(X^2)$ puis $\psi(X^k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

(c) En déduire la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$ où $a_{i,j}$ est le coefficient de X^{i-1} dans $\psi\left(X^{j-1}\right)$.

(d) Justifier que A est inversible.

Exercice 31. Exercice de calcul n° 1 (☆)
On pose $P(X) = -4X^3 - X^2 - 3$ et $Q(X) = 2X^2 - 2$.

1. Déterminer $(P+Q)(X)$, $P(X^2)$, $P(X+1)$, $P \circ Q(X)$.
2. Factoriser $P - Q$.

Exercice 32. (★★★) (*Voir l'indication ici*)
Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(X^2) = P(X-1)P(X)$$

.

Exercice 33. (☆) (*Voir l'indication ici*)

1. Montrer que $X^2 - 1$ divise $X^{10} - X^8 + X^6 - X^4$
2. Montrer que $(X-2)(X+3)$ divise $X^6 - 7X^4 + 6X^3$.
3. Montrer que $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$

Exercice 34. (★★) (*Voir l'indication ici*)
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4 - 41X^2 + 400$.

2 Indications

Exercice 22 - Indication. (*retour à l'exercice 22*)

- Pour P, trouver une racine évidente.
- Pour Q, utiliser la méthode vue dans l'exemple 8 du cours.
- Pour R procéder comme d'habitude, avec le discriminant.

Exercice 32 - Indication. (*retour à l'exercice 32*)
Considérer un polynôme constant solution et trouver tous les polynômes constant solutions.

Considérer ensuite un polynôme non constant solution et déterminer toutes ses racines possibles. A la fin vous devez ne trouver que 2 racines possibles. Déduisez-en sa forme factorisée et, en utilisant l'équation, simplifiez encore cette forme factorisée finissez de trouver les seuls polynômes possibles.
Vous devez trouver que les polynômes solutions sont de la forme $(X^2 + X + 1)^n$ ou le polynôme nul.

Exercice 33 - Indication. (*retour à l'exercice 33*)
Pas besoin de faire une division euclidienne ici ! Penser au fait que r_1, et r_2 sont racines distinctes de P ssi $(X - r_1)(X - r_2)$ divise P.

Exercice 34 - Indication. (*retour à l'exercice 34*)
Trouver toutes les racines en résolvant l'équation $X^4 - 41X + 400 = 0$.
C'est une équation bicarrée....
...Donc...
...Pour résoudre cette équation, poser $x = X^2$

3 Solutions

Exercice 6 - Correction. (*retour à l'exercice 6*)

1. $A = X^3 - 3X^2$, $B = X^2 - X + 2$
   Correction : $A(X) = B(X)(X-2) + (-4X+4)$.
2. $A = -16X^4 - 64X^2 - X - 100$, $B = 4X^2 + 4X + 10$
   Correction : $A(X) = B(X)(-4X^2 + 4X - 10) - X$.
3. $A = X^4 + 6X^2 - 2X + 5$, $B = X^3 - X^2 + 4X - 4$
   Correction : $A(X) = B(X)(X+1) + 3X^2 - 2X + 9$.
4. $A = X^3 + iX^2 + X$, $B = X - i + 1$
   ' **Correction** : $A(X) = B(X)(X^2 - (1-2i)X - 3i) + (3+3i)$.
5. $A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + X$, $B = (X-1)^2$
   Correction : si on pose $P_n(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + X$, alors on remarque en débutant la division euclidienne que $P_n(X) = A(X) = nB(X)X^{n*} + P_{n-1}(X)$ et donc en itérant, on obtient $P_n(X) = B(X)(nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \ldots + 1) + X - 1$.

Exercice 12 - Correction. (*retour à l'exercice 12*)
Si on note a et b les racines de P alors a et b sont racines du reste de la division euclidienne de P par P'. On trouve ainsi $a = -2$ et $b = 3$ donc $P(X) = (X+2)^2(X-3)^2$

Exercice 23 - Correction. (*retour à l'exercice 23*)
On remarque que pour tout $n \geq 1$, $P_n(X) = P_n'(X) + \frac{X^n}{n!}$, donc si P_n a une racine multiple que l'on note a, elle annule aussi P_n' et donc $\frac{a^n}{n!} = 0$, donc $a = 0$ mais 0 n'est pas racine de P_n (car son coefficient constant est non nul), donc P_n n'a pas de racine multiple.

Exercice 20 - Correction. (*retour à l'exercice 20*)
On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$. On remarque que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $Q(k\pi) = 0$, donc Q possède une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul. Ainsi, P est un polynôme constant.

Exercice 24 - Correction. (*retour à l'exercice 24*)

1. On sait que $\deg((X^2-1)P') \leq n+1$ et $\deg((nX+1)P) \leq n+1$. On va vérifier que les termes en X^{n+1} est nul. Si on écrit $P(X) = a_nX^n + Q(X)$ avec $\deg(Q) \leq n-1$, on a que le terme en X^{n+1} de $(X^2-1)P')$ est na_n et celui de $(nX+1)P$ est aussi na_n, donc les termes en X^{n+1} s'annulent et $\deg(\varphi(P)) \leq n$, ce qu'il fallait démontrer.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ et $a \neq -1$, on suppose que a est racine de P de multiplicité α. On peut donc écrire $P(X) = (X-a)^\alpha Q(X)$ où $Q(a) \neq 0$. On obtient ainsi

   $$\begin{aligned}(X^2-1)P' - (nX+1)P &= (X^2-1)((X-a)^\alpha Q'(X) + \alpha(X-a)^{\alpha-1}Q(X)) - (nX+1)(X-a)^\alpha Q(x) \\ &= \lambda(X-a)^\alpha Q(X)\end{aligned}$$

   Et donc

   $$(X^2-1)\alpha(X-a)^{\alpha-1}Q(X) = \lambda(X-a)^\alpha Q(X) + (nX+1)(X-a)^\alpha Q(x) - (X^2-1)(X-a)^\alpha Q'(X)$$

a est racine de multiplicité au moins α dans le terme de droite mais de multiplicité au plus $\alpha-1$ dans le terme de gauche. Donc les seules racines possibles pour P sont -1 et 1.
Donc on peut écrire P sous la forme $a_n(X-1)^k(X+1)^l$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}(X^2-1)(a_nk(X-1)^{k-1}(X+1)^l+a_nl(X-1)^k(X+1)^{l-1})-(nX+1)(a_n(X-1)^k(X+1)^l)\\ =\lambda(a_n(X-1)^k(X+1)^l)\end{aligned}$$

comme $X^2-1=(X+1)(X-1)$, on obtient

$$(a_nk(X-1)^k(X+1)^{l+1}+a_nl(X-1)^{k+1}(X+1)^l)-(nX+1)(a_n(X-1)^k(X+1)^l)=\lambda(a_n(X-1)^k(X+1)^l)$$

on peut mettre $a_n(X-1)^k(X+1)^l$ en facteur et on a $k(X+1)+l(X-1)-(nX+1)=\lambda$ donc $k+l=n$ et $\lambda=k-l-1=2k-n-1$ avec $k\in[\![0,n]\!]$.

Exercice 25 - Correction. (*retour à l'exercice 25*)
Si le polynôme $P(X)=X^2+bX+c$ a deux racines distinctes x_1 et x_2, alors on fait la division euclidienne de X^n par P pour obtenir $X^n=P(X)Q(X)+R(X)$ où R est de degré inférieur ou égal à 1 donc s'écrit $R(X)=\alpha X+\beta$, on évalue en x_1 et x_2, on obtient $\alpha x_1+\beta=x_1^n$ et $\alpha x_2+\beta=x_2^n$ donc $\alpha=\frac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2}$ et $\beta=x_1^n-x_1\frac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2}$. Donc $A^n=\frac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2}A+x_1^n-x_1\frac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2}I_2$.
Si P a une racine double x_1, alors pour obtenir R on obtient deux relations en dérivant : $\alpha x_1+\beta=x_1^n$ et $nx_1^{n-1}=\beta$, donc $\alpha=x_1^{n-1}-nx_n^{n-2}$. On en déduit que $A^n=(x_1^{n-1}-nx_n^{n-2})A+nx_1^{n-1}I_2$.
On peut appliquer ces résultats pour la matrice A donnée en remarquant que $A^2-aX-bI_2=0$.

Exercice 26 - Correction. (*retour à l'exercice 26*)

1. On va montrer par récurrence double que P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$. Pour l'initialisation, ok. Pour l'hérédité, soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que P_n est de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$ et P_{n+1} est de degré $n+1$ et de coefficient dominant $(-2)^{n+1}$. Le deuxième terme de la définition de P_{n+2} est de degré n mais le premier est de degré $n+2$, son coefficient dominant est -2 fois celui de P_{n+1}, ce qui conclut la preuve.

2. Pour évaluer le coefficient constant d'un polynôme, il faut l'évaluer en 0. On pose pour tout entier n, b_n le coefficient constant de P_n, on trouve $b_{n+2}=-2(n+1)b_n$. On en déduit que

$$\begin{aligned}b_{2n+2}&=-2(2n+1)b_{2n}=-2(2n+1)\times(-2)(2n-1)b_{2n-2}\\&=(-2)^{n+1}b_0\prod_{k=1}^n(2k+1)\\&=(-2)^{n+1}\prod_{k=1}^n\frac{(2k+1)2k}{2k}\\&=(-2)^{n+1}(2n+1)!\frac{1}{2^n\prod_{k=1}^nk}\\&=(-2)^{n+1}(2n+1)!\frac{1}{2^nn!}\end{aligned}$$

et pour b_{2n+1}, comme $b_1=0$, on en déduit de la relation $b_{n+2}=-2(n+1)b_n$ que $b_{2n+1}=0$ pour tout entier n.

3. On va montrer par récurrence que pour tout entier n, P_{2n} est pair et P_{2n+1} est impair. Pour l'initialisation, ok. Pour l'hérédité :

$$\begin{aligned}P_{2n+2}(-X)&=2XP_{2n+1}(-X)-2(n+1)P_{2n}(-X)\\&=-2XP_{2n+1}(X)-2(n+1)P_{2n}(X)\end{aligned}$$

par l'hypothèse de récurrence, donc P_{2n+2} est pair. De même,

$$\begin{aligned} P_{2n+3}(-X) &= 2XP_{2n+2}(-X) - 2(n+1)P_{2n+1}(-X) \\ &= 2XP_{2n+2}(X) + 2(n+1)P_{2n+1}(X) \end{aligned}$$

donc P_{2n+3} est impair, ce qui conclut la preuve.