DM n° 4 - Matrices et polynômes

A rendre vendredi 20/11

Pour ce DM, vous avez le choix entre deux versions du même exercice :

- *La version "basique" où on travaille avec des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, mais qui est déjà assez calculatoire sur la fin.*
- *La version "avancé" où on travaille avec des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ où $p \in \mathbb{N}^*$. Et qui est franchement difficile sur la fin.*
  A vous de choisir la version qui vous correspond. Vous pouvez aussi vous "échauffer" avec la version "basique" avant de faire la version "avancé".

Bon travail !

1 Version Basique.

On notera dans cette exercice I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ (donc $I = I_5$) et J la matrice de $M_5(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. (a) Calculer J^2 et J^3. Exprimez ces deux matrices à l'aide de J.
   (b) Conjecturer alors une expression de J^n en fonction de J pour tout entier $n \geq 1$.
   (c) Démontrez votre conjecture par récurrence.
2. On considère un réel $\lambda \neq 0$ et la matrice $A = I + \lambda J$.
   (a) Exprimer A^2 en fonction de I et J (et pas de J^2).
   (b) En déduire le réel λ tel que $X^2 - 12X + 11$ soit un polynôme annulateur de A.
   Indication : vous devez trouver $\lambda = 2$.
3. On considère maintenant $\lambda = 2$ et donc $A = I + 2J$.
   On admet, si on n'a pas réussi la question précédente, que $X^2 - 12X + 11$ est un polynôme annulateur de A.
   (a) Écrire la matrice A.
   (b) **Inverse de A.**
      i. Montrer que A est inversible et donner l'expression de A^{-1} en fonction de A et I. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de I et J.
      Indication : vous devez trouver $A^{-1} = I - \dfrac{2}{11}J$.
      ii. Vérifiez par le calcul qu'on a bien $\left(I - \dfrac{2}{11}J\right)(I + 2J) = I$.
   (c) **Calcul de A^n par une première méthode.**
      i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 12X + 11$.
      ii. En déduire une expression de A^n en fonction de A et de I puis en fonction de I et de J.
   (d) **Calcul de A^n par une deuxième méthode :**
   A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer A^n en fonction de I et de J. Vérifiez que vous retrouvez la même expression qu'à la question précédente.
   (e) **Retour de A^{-1} :**
   En appliquant l'expression trouvée à la question précédente pour $n = -1$, vérifiez que vous retrouvez l'expression de A^{-1} obtenu à la question 3.b. Ce résultat était-il prévisible ?

2 Version Avancé.

On considère un entier $p \in \mathbb{N}^*$.
On notera dans cette exercice I la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (donc $I = I_p$) et J la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. (a) Calculer J^2 et J^3. Exprimez ces deux matrices à l'aide de J.
   (b) Conjecturer alors une expression de J^n en fonction de J pour tout entier $n \geq 1$.
   (c) Démontrez votre conjecture par récurrence.

2. On considère un réel $\lambda \neq 0$ et la matrice $A = I + \lambda J$.
   (a) Exprimer A^2 en fonction de I et J (et pas de J^2).
   (b) En déduire le réel λ tel que $X^2 - (2+2p)X + 1 + 2p$ soit un polynôme annulateur de A.
   Indication : vous devez trouver $\lambda = 2$.

3. On considère maintenant $\lambda = 2$ et donc $A = I + 2J$.
   On admet, si on n'a pas réussi la question précédente, que $X^2 - (2+2p)X + 1 + 2p$ est un polynôme annulateur de A.
   (a) Écrire la matrice A.
   (b) **Inverse de A.**
      i. Montrer que A est inversible et donner l'expression de A^{-1} en fonction de A et I. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de I et J.
      Indication : vous devez trouver $A^{-1} = I - \dfrac{2}{1+2p}J$.
      ii. Vérifiez par le calcul qu'on a bien $\left(I - \dfrac{2}{1+2p}J\right)(I+2J) = I$.
   (c) **Calcul de A^n par une première méthode.**
      i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - (2+2p)X + 1 + 2p$.
      ii. En déduire une expression de A^n en fonction de A et de I puis en fonction de I et de J.
   (d) **Calcul de A^n par une deuxième méthode :**
   A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer A^n en fonction de I et de J. Vérifiez que vous retrouvez la même expression qu'à la question précédente.
   (e) **Retour de A^{-1} :**
   En appliquant l'expression trouvée à la question précédente pour $n = -1$, vérifiez que vous retrouvez l'expression de A^{-1} obtenu à la question 3.b. Ce résultat était-il prévisible ?