

# Programme de colle n° 7

## Semaine du 16/11/2019

*La colle commencera par une division euclidienne simple que vous devrez effectuer.*

### Exercices préparés et démonstrations

1. Déterminer  $A^n$  avec  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . C'est l'exemple 5 du chapitre 6.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3x + 2$  (c'est la question 1 de l'exercice 28 de la FE07).
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 6X + 9$  (c'est la question 2 de l'exercice 28 de la FE07).

### Contenu à connaître

#### Chapitre 6 - Matrices

Vous devez maîtriser la partie "matrices" du programme de colle de la semaine dernière.

#### Chapitre 7 - Polynômes

*Sur les polynômes, il y a peu de cours. Il faut surtout refaire les exercices que nous avons vu en classe.*

#### Le minimum vital

*Notation des familles de polynômes*

- Connaître et comprendre les notations  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $\mathbb{C}_n[X]$ .  
Savoir en particulier que  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  signifie que  $P$  est un polynôme de degré *au plus*  $n$ , mais pas forcément de degré  $n$ .
- Savoir que :
  - $P \in \mathbb{R}_1[X] \iff P(X) = aX + b$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .
  - $P \in \mathbb{R}_2[X] \iff P(X) = aX^2 + bX + c$ , avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
  - $P \in \mathbb{R}_3[X] \iff P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ , avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .
  - etc....

*Division euclidienne*

- Savoir effectuer, puis écrire une division euclidienne. Par exemple, savoir effectuer les divisions euclidiennes de l'exercice 7 de la FE07.
- Savoir écrire une division euclidienne de  $A$  par  $B$  où  $A$  et  $B$  sont deux polynômes quelconques.  
C'est-à-dire : savoir écrire que  $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$  avec  $\deg R < \deg B$ .

*Degré d'un polynôme*

- Connaître ce qu'on appelle coefficient dominant d'un polynôme.
- Connaître la règle du degré du produit de deux polynômes.  
Donc savoir que  $\deg(AB) = \deg A + \deg B$ .

- Connaître le début et la fin du développement de  $(X + 1)^n$ , et de  $(X - 1)^n$  :

$$(X + 1)^n = X^n + nX^{n-1} + \dots + 1$$

$$(X - 1)^n = X^n - nX^{n-1} + \dots + (-1)^n$$

*Divisibilité par un polynôme.*

- Savoir ce que veut dire que  $B$  divise  $A$ .

### Le standard

*Degré d'un polynôme*

- Connaître la règle du degré de la somme de deux polynômes.  
Donc savoir que  $\deg(A + B) \leq \max(\deg A, \deg B)$  et qu'on a l'égalité si  $\deg A \neq \deg B$ .

*Dérivée d'un polynôme.*

- Savoir donner la dérivée d'un polynôme quelconque :  $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ . Savoir aussi donner la dérivée avec le symbole somme (cf définition 5).

### Le compétitif

- Connaître un peu plus que le début et la fin du développement de  $(X + 1)^n$ , de  $(X - 1)^n$  et de  $(X + a)^n$  :

$$(X + 1)^n = X^n + nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2} + n + 1$$

$$(X - 1)^n = X^n - nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$(X + a)^n = X^n + naX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^2X^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} + na^{n-1} + a^n$$