

Programme de colle n° 7

Semaine du 16/11/2019

La colle commencera par une division euclidienne simple que vous devrez effectuer.

Exercices préparés et démonstrations

1. Déterminer A^n avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. C'est l'exemple 5 du chapitre 6.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3x + 2$ (c'est la question 1 de l'exercice 28 de la FE07).
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 6X + 9$ (c'est la question 2 de l'exercice 28 de la FE07).

Contenu à connaître

Chapitre 6 - Matrices

Vous devez maîtriser la partie "matrices" du programme de colle de la semaine dernière.

Chapitre 7 - Polynômes

Sur les polynômes, il y a peu de cours. Il faut surtout refaire les exercices que nous avons vu en classe.

Le minimum vital

Notation des familles de polynômes

- Connaître et comprendre les notations $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{C}_n[X]$.
Savoir en particulier que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ signifie que P est un polynôme de degré *au plus* n , mais pas forcément de degré n .
- Savoir que :
 - $P \in \mathbb{R}_1[X] \iff P(X) = aX + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
 - $P \in \mathbb{R}_2[X] \iff P(X) = aX^2 + bX + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
 - $P \in \mathbb{R}_3[X] \iff P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
 - etc....

Division euclidienne

- Savoir effectuer, puis écrire une division euclidienne. Par exemple, savoir effectuer les divisions euclidiennes de l'exercice 7 de la FE07.
- Savoir écrire une division euclidienne de A par B où A et B sont deux polynômes quelconques.
C'est-à-dire : savoir écrire que $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$ avec $\deg R < \deg B$.

Degré d'un polynôme

- Connaître ce qu'on appelle coefficient dominant d'un polynôme.
- Connaître la règle du degré du produit de deux polynômes.
Donc savoir que $\deg(AB) = \deg A + \deg B$.

- Connaître le début et la fin du développement de $(X + 1)^n$, et de $(X - 1)^n$:

$$(X + 1)^n = X^n + nX^{n-1} + \dots + 1$$

$$(X - 1)^n = X^n - nX^{n-1} + \dots + (-1)^n$$

Divisibilité par un polynôme.

- Savoir ce que veut dire que B divise A .

Le standard

Degré d'un polynôme

- Connaître la règle du degré de la somme de deux polynômes.
Donc savoir que $\deg(A + B) \leq \max(\deg A, \deg B)$ et qu'on a l'égalité si $\deg A \neq \deg B$.

Dérivée d'un polynôme.

- Savoir donner la dérivée d'un polynôme quelconque : $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$. Savoir aussi donner la dérivée avec le symbole somme (cf définition 5).

Le compétitif

- Connaître un peu plus que le début et la fin du développement de $(X + 1)^n$, de $(X - 1)^n$ et de $(X + a)^n$:

$$(X + 1)^n = X^n + nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2} + n + 1$$

$$(X - 1)^n = X^n - nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$(X + a)^n = X^n + naX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^2X^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} + na^{n-1} + a^n$$