Feuille d'exercices n° 8 - Ensembles et Applications

1 Ensembles

Exercice 1. (★★)
Décrire $\mathscr{P}\Big(\{1\}\Big)$ et $\mathscr{P}\Big(\{0,1,2,3\}\Big)$

Exercice 2. (★★★)
Décrire $\mathscr{P}\Big(\mathscr{P}(\{1\})\Big)$.

Exercice 3. (★★)
Soient A, B, C, trois parties d'un ensemble E. Exprimer $\overline{A \cap (B \cup C)}$ à l'aide de $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{C}$.

Exercice 4. (★★)
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $\overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A$.

Exercice 5. (★★)
Soient A, B, C, trois parties d'un ensemble E. Montrer que si $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$ alors $B \subset C$.

Exercice 6. (★★★)
Soient A, B, C, trois ensembles. Montrer que :

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

Exercice 7. (★)
Dans chaque cas ci-dessous, on donne un ensemble E et des parties A et B de E. Expliciter $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap B$ et $A \cap \overline{B}$.

1. $E = \{1,2,3,4\}\,,\ A = \{1,2\}\,,\ B = \{2,4\}\,.$
2. $E = \mathbb{R},\ A =]-\infty, 2]\,,\ B = [1, +\infty[\,.$
3. $E = \mathbb{R},\ A =]-\infty, 1]\,,\ B = [2, +\infty[\,.$
4. $E = \mathbb{R},\ A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{R}_+^*.$

Exercice 8. (★★★)
On note E l'ensemble des suites géométriques et F l'ensemble de suites suivant :

$$F = \Big\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Big| u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+3} + 3u_{n+2} - u_n = 0 \Big\}.$$

Déterminer $E \cap F$.
Remarque : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles.

Exercice 9. (★★★) - Différence symétrique
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On définit la différence symétrique Δ de A et B de la manière suivante :
$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Représenter $A\Delta B$ à l'aide d'un schéma.
2. Vérifier par le calcul que $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$.
3. Déterminer, pour toute partie A de E, $A\Delta\emptyset,\ A\Delta E,\ A\Delta A,\ A\Delta\overline{A}$.
4. Montrer que pour toute partie A de E, il existe une unique partie X telle que $A\Delta X = \emptyset$.

2 Applications

Exercice 10. (★★)
Pour les fonctions f définies ci-dessous, calculer l'image de a par f et l'ensemble des antécédents de b par f. Étudier ensuite la surjectivité et l'injectivité de f. Si f est bijective, déterminer son application réciproque.

1. $f\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{x-1} \end{array}\right.\ ;\ a=2\ ;\ b=\frac{1}{2}.$
2. $f\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right.\ ;\ a=-1\ ;\ b=0.$
3. $f\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0,1] \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right.\ ;\ a=0\ ;\ b=1.$

Exercice 11. (★★)
Déterminer dans chaque cas, si l'application est injective, surjective, bijective. Préciser la réciproque en cas de bijectivité.

1. $f_1\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2 \end{array}\right.$
2. $f_2\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \longmapsto & \frac{2x+3}{x-3} \end{array}\right.$
3. $f_3\ :\ \left\{\begin{array}{rcl}]-\infty,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1-x) \end{array}\right.$
4. $f_4\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [-1,+\infty[\\ x & \longmapsto & 5x^2-1 \end{array}\right.$
5. $f_5\ :\ \left\{\begin{array}{rcl}]3,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x-3} \end{array}\right.$
6. $f_6\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n^2 \end{array}\right.$
7. $f_7\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ k & \longmapsto & n+1-k \end{array}\right.$
8. $f_8\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}\right.$
9. $f_9\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & 2\mathbb{N} \text{ (entiers pairs)} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}\right.$

Exercice 12. (★★)
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f\ :\ \left\{\begin{array}{rcl}]a,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x-a} \end{array}\right.$.
Montrer que f est bijective de $]a,+\infty$ sur $]0,+\infty[$. Préciser f^{-1}.

Exercice 13. (★)
On pose :
$$f\ :\ \left\{\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+\frac{1}{x} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad g\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+\frac{1}{x} \end{array}\right.$$
(on dit que g est la restriction de f à $[1,+\infty[$).
Montrer que f n'est pas injective puis que g est injective, mais pas surjective.
On pourra dresser le tableau de variations de f.

Exercice 14. (★★)
Démontrer dans chaque cas que la fonction est bijective et déterminer sa réciproque.

1. $f\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -5x+2 \end{array}\right.$.

2. $g\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{3}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{3}\right\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{5x+8}{3x+5} \end{array}\right.$.

3. $h\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array}\right.$, avec $a \neq 0$.

4. $ch\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array}\right.$ (c'est la fonction "cosinus hyperbolique").

5. $sh\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array}\right.$ (c'est la fonction "sinus hyperbolique").