

# Programme de colle n° 8

## Semaine du 23/11/2019

*Cette semaine, le format de la colle sera un peu différent de d'habitude :*

1. Une question de cours rapide sur une notion à connaître
2. Un exercice "type" parmi l'un de ceux listés ci-dessous.
3. Un ou plusieurs exercices "non préparés".

### Exercices types à savoir faire

1. Savoir effectuer une division euclidienne.
2. Savoir factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  ou dans  $\mathbb{C}[X]$  un polynôme dans les cas suivants :
  - Polynôme de degré 2
  - Polynôme de degré supérieur à 2 avec une ou plusieurs racine(s) évidente(s) ou donnée(s) par l'énoncé. Ces racines peuvent simple, double, triple, etc...
  - Polynômes bicarrés
3. Savoir déterminer le reste dans la division euclidienne de  $X^n$  par :
  - Un polynôme de degré 2 ayant deux racines distinctes (par exemple  $X^2 - 3x + 2$ )
  - Un polynôme de degré 2 ayant une racine double ( $X^2 - 6X + 9$ ).
4. Savoir calculer l'image de  $X^2$ ,  $X$  et 1 et plus généralement par  $X^k$  par une application sur les polynômes (par exemple par l'application  $\psi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto 2P + (X-1)P' \end{cases}$ .)
5. Savoir, lorsque  $P$  est un polynôme de degré  $n$ , déterminer le degré et le coefficient dominant d'un polynôme défini à partir de  $P$ . Par exemple du polynôme  $2P(X) + (X-1)P'(X)$ .

### Notions à connaître

#### Chapitre 6 - Matrices

Vous devez maîtriser le cours sur les matrices et surtout le lien avec les polynômes annulateurs.

#### Chapitre 7 - Polynômes

*Sur les polynômes, il y a peu de cours. Il faut surtout refaire les exercices que nous avons vu en classe.*

#### Le minimum vital

*Notation des familles de polynômes*

- Connaître et comprendre les notations  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $\mathbb{C}_n[X]$ .  
Savoir en particulier que  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  signifie que  $P$  est un polynôme de degré au plus  $n$ , mais pas forcément de degré  $n$ .
- Savoir que :
  - $P \in \mathbb{R}_1[X] \iff P(X) = aX + b$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .
  - $P \in \mathbb{R}_2[X] \iff P(X) = aX^2 + bX + c$ , avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
  - $P \in \mathbb{R}_3[X] \iff P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ , avec  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .
  - etc....

*Division euclidienne*

- Savoir écrire une division euclidienne de  $A$  par  $B$  où  $A$  et  $B$  sont deux polynômes quelconques.  
C'est-à-dire : savoir écrire que  $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$  avec  $\deg R < \deg B$ .

*Degré d'un polynôme*

- Connaître ce qu'on appelle coefficient dominant d'un polynôme.
- Connaître la règle du degré du produit de deux polynômes.  
Donc savoir que  $\deg(AB) = \deg A + \deg B$ .
- Connaître le début et la fin du développement de  $(X + 1)^n$ , et de  $(X - 1)^n$  :

$$(X + 1)^n = X^n + nX^{n-1} + \dots + 1$$

$$(X - 1)^n = X^n - nX^{n-1} + \dots + (-1)^n$$

*Dérivées successives*

- Connaître les notations  $P^{(1)}$ ,  $P^{(2)}$ ,  $P^{(3)}$ , etc... Et ne pas les confondre avec  $P^1, P^2, P^3$ , etc...

*Racines et divisibilité par un polynôme.*

- Savoir ce que veut dire que  $B$  divise  $A$ . (cela veut dire que  $A = BQ$  où  $Q$  est un polynôme. Cela veut aussi dire que le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est nul.)
- Savoir que :
  - $a$  et racine simple de  $P$  ssi  $P(a) = 0$  et  $P'(a) \neq 0$
  - $a$  et racine double de  $P$  ssi  $P(a) = 0 = P'(a)$  et  $P''(a) \neq 0$
  - $a$  et racine triple de  $P$  ssi  $P(a) = 0 = P'(a) = P''(a)$  et  $P^{(3)}(a) \neq 0$ .
  - etc...
- Savoir que :
  - $a$  et racine simple de  $P$  ssi  $(X - a)$  divise  $P(X)$  et  $(X - a)^2$  ne divise pas  $P(X)$ .
  - $a$  et racine double de  $P$  ssi  $(X - a)^2$  divise  $P(X)$  et  $(X - a)^3$  ne divise pas  $P(X)$ .
  - $a$  et racine triple de  $P$  ssi  $(X - a)^3$  divise  $P(X)$  et  $(X - a)^4$  ne divise pas  $P(X)$ .
  - etc...
- Savoir que :
  - $r_1$  et  $r_2$  racines distinctes de  $P$  ssi  $(X - r_1)(X - r_2)$  divise  $P$ .
  - $r_1, r_2$  et  $r_3$  racines distinctes de  $P$  ssi  $(X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)$  divise  $P$ .
  - etc...

**Le standard***Degré d'un polynôme*

- Connaître la règle du degré de la somme de deux polynômes.  
Donc savoir que  $\deg(A + B) \leq \max(\deg A, \deg B)$  et qu'on a l'égalité si  $\deg A \neq \deg B$ .

*Dérivée d'un polynôme.*

- Savoir donner la dérivée d'un polynôme quelconque :  $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$ . Savoir aussi donner la dérivée avec le symbole somme (cf définition 5).

**Le compétitif**

- Connaître un peu plus que le début et la fin du développement de  $(X + 1)^n$ , de  $(X - 1)^n$  et de  $(X + a)^n$  :

$$(X + 1)^n = X^n + nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2} + n + 1$$

$$(X - 1)^n = X^n - nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

$$(X + a)^n = X^n + naX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^2X^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} + na^{n-1} + a^n$$