Colle n°6 – sommes et matrices

Exercices préparés

Exercice préparé 1

Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice N telle que $A = N + 2I_3$.
2. Vérifier que $N^3 = 0$ (on dit que N est nilpotente).
3. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice préparé 2

Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible et si c'est le cas, déterminer son inverse.

Exercice préparé 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$ et déduisez en que A est inversible et donnez A^{-1}.
2. Vérifiez par un calcul que la matrice A^{-1} trouvée est bien l'inverse de A.

Exercices non préparés

Calculs de sommes

Exercice 1 .
Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{n} 4 \times 3^k \quad ; \quad B = \sum_{k=0}^{n} \frac{3}{2^k} \quad ; \quad C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$$

Exercice 2 .
Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=3}^{n} 5 \times 2^k \quad ; \quad B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \quad ; \quad C = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^k}$$

Exercice 3 .
Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=2}^{n} k^2 - 4k + 4$$

Exercice 4 .
Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^{n} k(k+3)$$

Exercice 5 .
Calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \text{ et } T = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Exercice 6 .
Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$S = \sum_{k=1}^{m} k x^{k-1}$$

2. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $mA^{m+1} = (m+1)A^m$. Démontrer que $A - I_n$ est inversible.

Exercice 7 .

Calculer les produits LC et CL, avec $L = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 .

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer AB, ${}^tA$, ${}^tB$ et ${}^tB\,{}^tA$. Vérifier que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Exercice 9 .

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leurs inverses :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 .

Pour les matrices suivantes, calculer lorsque c'est possible le produit AB et le produit BA

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = {}^t A$
4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A$.

Exercice 11 .

1. Déterminer les matrices carrées de taille 3 qui commutent avec $\text{diag}(1, 2, 3)$.
2. Soient α et β deux réels tels que $\alpha \neq \beta$. Déterminer les matrices carrées de taille 3 qui commutent avec $diag(\alpha, \alpha, \beta)$.
3. Déterminer les matrices (carrées de taille n) qui commutent avec $\text{diag}(1, 2, \ldots, n)$.

Exercice 12 .

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les premières puissances de A (à partir de 2) et en déduire une conjecture pour l'expression de A^n, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2. Démontrer ce résultat par récurrence.

Exercice 13 .

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Conjecturez l'expression de A^n puis démontrez votre conjecture par récurrence.

Exercice 14 .

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression de A^n.

Exercice 15 .

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Conjecturez l'expression de A^n puis démontrez votre conjecture par récurrence.

Exercice 16 .

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Détrminer l'expression de A^n.

Exercice 17 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$dont tous les coefficients valent 1. Calculez J_n^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 18 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent $a \in \mathbb{R}$ sauf ceux sur la diagonales qui valent $b \in \mathbb{R}$. Calculez A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 19 .

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer B en fonction de A et I_2.
3. En déduire la valeur de B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 .

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 21 .

Justifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 22 .

Justifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 23 .

Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice A_m est inversible et calculer A_m^{-1} pour ces valeurs, où A_m est donnée par

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Exercice 24 .

Soit $B = (\min(i,j))_{1\leq 1, j \leq n}$.

1. Déterminer B
2. Déterminer M telle que $B = {}^tMM$.
3. En déduire que $B \in GL_n(\mathbb{R})$ et déterminer B^{-1}.