DM04 - Correction

Version "Basique"

1.(a) On a :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 5J$$

$$\boxed{J^2 = 5J}$$

- $J^3 = J^2 \times J = 5J \times J = 5J^2 = 5 \times 5J$

D'où $\boxed{J^3 = 25J}$

b) On conjecture que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J^n = 5^{n-1} J}$

c) On pose $\mathcal{P}(n)$: " $J^n = 5^{n-1} J$ ".

Initialisation $(n=1)$

$J^1 = J$ et $5^{1-1} J = 5^0 J = J$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} J^{n+1} &= J^n \times J \\ &= 5^{n-1} J \times J \quad \text{par hyp. de rec.} \\ &= 5^{n-1} \times J^2 \\ &= 5^{n-1} \times 5J \quad \text{car on a vu que } J^2 = 5J \\ &= 5^n \times J \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 1,\ J^n = 5^{n-1} J}$

2\. (a) On a $A^2 = (I + \lambda J)^2$

On I et λJ commutent

Donc $(I+\lambda J)^2 = I^2 + 2 \times I \times \lambda J + (\lambda J)^2$

$= I + 2\lambda J + \lambda^2 J^2$

$= I + 2\lambda J + \lambda^2 \times 5J$

$= I + (2\lambda + 5\lambda^2) J$

D'où : $\boxed{A^2 = I + (2\lambda + 5\lambda^2) J}$

(b) On cherche λ tel que :

$A^2 - 12A + 11I = 0$

$\Leftrightarrow I + (2\lambda + 5\lambda^2)J - 12(I + \lambda J) + 11I = 0$

$\Leftrightarrow \cancel{I} + (2\lambda + 5\lambda^2)J - \cancel{12I} - 12\lambda J + \cancel{11}I = 0$

$\Leftrightarrow (2\lambda + 5\lambda^2)J - 12\lambda J = 0$

$\Leftrightarrow (5\lambda^2 - 10\lambda) J = 0$

$\Leftrightarrow 5\lambda^2 - 10\lambda = 0$

$kA = 0$

$\Leftrightarrow k = 0$ ou $A = 0$

$\Leftrightarrow 5\lambda(\lambda - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda - 2 = 0$ car $\lambda \neq 0$

Donc $\boxed{\lambda = 2}$

3\) (a)

$$A = I + 2J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

i. On a $A^2 - 12A + 11I = 0$

$\Leftrightarrow 11I = 12A - A^2$

$\Leftrightarrow I = \frac{1}{11} \times A(12I - A)$

$\Leftrightarrow I = A \times \frac{1}{11}(12I - A)$

Donc $A \in GL_p(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = \frac{1}{11}(12I - A)$

D'où $A^{-1} = \frac{1}{11}\left(12I - (I + 2J)\right)$

$\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{11}(11I - 2J)$

$\Leftrightarrow A^{-1} = I - \frac{2}{11} J$

ii. $\left(I - \frac{2}{11} J\right)(I+2J) = I^2 + 2J - \frac{2}{11}J - \frac{4}{11}J^2$

$= I + \frac{22}{11}J - \frac{2}{11}J - \frac{4}{11} \times 5J$

$= I.$

(c) La division euclidienne de X^n par $X^2 - 12X + 11$ s'écrit :

$$X^n = (X^2 - 12X + 11)\,Q(X) + R(X)$$

où $\deg R < 2$

donc $R(X) = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

D'où : $X^n = (X^2 - 12X + 11)\,Q(X) + aX + b \quad (*)$

On cherche les racines de $X^2 - 12X + 11$

$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 11$

$= 144 - 44 = 100 > 0$ donc il y a 2 racines réelles.

$r_1 = \frac{12 - \sqrt{100}}{2} = \frac{12-10}{2} = 1$

et $r_2 = \frac{12 + \sqrt{100}}{2} = \frac{12+10}{2} = 11$

On écrit l'égalité $(*)$ en $X = 1$ et $X = 11$:

$$\begin{cases} 1^n = 0 \times Q(1) + a + b \\ 11^n = 0 \times Q(11) + 11a + b \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = a + b \\ 11^n = 11a + b \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 11^n - 1 = 10a & (L_1 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 11 - 11^n = 10b & (L_2 \leftarrow 11L_1 - L_2) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a = \frac{11^n - 1}{10} \\ b = \frac{11 - 11^n}{10} \end{cases}$$

D'où $R(X) = \frac{11^n - 1}{10} X + \frac{11 - 11^n}{10}$

ii. On applique l'égalité $(*)$ à A :

$A^n = (\underbrace{A^2 - 12A + 11I}_{0})\,Q(A) + R(A)$

$\Longleftrightarrow A^n = R(A)$

$\Longleftrightarrow A^n = \frac{11^n - 1}{10} A + \frac{11 - 11^n}{10} I$

$\Longleftrightarrow A^n = \frac{11^n - 1}{10}(I + 2J) + \frac{11 - 11^n}{10} I$

$\Longleftrightarrow A^n = \frac{11^n - 1 + 11 - 11^n}{10} I + \frac{11^n - 1}{10} \times 2J$

$\Longleftrightarrow A^n = I + \frac{11^n - 1}{5} J$

d) On a $A = I + 2J$ or I et $2J$ commutent.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (I + 2J)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} (2J)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k J^k$$

On a $J^k = 5^{k-1} J$, mais que si $k \geq 1$.

Donc on sort le terme de rang 0 de la somme

$$= 2^0 J^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k J^k$$
$$= I + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} 2^k \times 5^{k-1} J \right)$$

$aJ + bJ = (a+b)J$

$$= I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 5^{k-1} \right) J$$
$$= I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k 5^k}{5} \right) J$$
$$= I + \frac{1}{5} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 10^k \right) J$$

presque un binôme de Newton. Il manque le terme de rang 0

Donc on l'ajoute et on le retranche

$$= I + \frac{1}{5} \left(\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 10^k \right) - 1 \right) J$$
$$= I + \frac{1}{5} \left(11^n - 1 \right) J$$
$$= I + \frac{11^n - 1}{5} J$$

On retrouve bien le résultat de la question c.

(e) La formule obtenue à la question précédente est valable pour $n \geq 0$.

Il n'y a aucune raison, a priori pour qu'elle soit vraie pour $n = -1$.

On essaie quand même :

$$I + \frac{11^{-1} - 1}{5} J = I + \frac{\frac{1}{11} - 1}{5} J$$
$$= I + \frac{-\frac{10}{11}}{5} J$$
$$= I + -\frac{10}{11} \times \frac{1}{5} J$$
$$= I - \frac{2}{11} J$$

On reconnaît A^{-1}.

$$= A^{-1}.$$

Contre toute attente, l'égalité est aussi vraie pour $n = -1$!

Version "Avancé"

1.(a) On a :

$$J = \begin{array}{c} p \text{ colonnes} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \left.\vphantom{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}\right\} p \text{ lignes}$$

Donc $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} p & p & \cdots & p \\ p & p & \cdots & p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p & p & \cdots & p \end{pmatrix} = pJ$

$\boxed{J^2 = pJ}$

- $J^3 = J^2 \times J = pJ \times J = pJ^2 = p \times pJ$

D'où $\boxed{J^3 = p^2 J}$

b) On conjecture que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ J^n = p^{n-1} J}$

c) On pose $\mathcal{P}(n)$: " $J^n = p^{n-1} J$ ".

Initialisation ($n=1$)

$J^1 = J$ et $p^{1-1} J = p^0 J = J$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} J^{n+1} &= J^n \times J \\ &= p^{n-1} J \times J \\ &= p^{n-1} \times J^2 \\ &= p^{n-1} \times pJ \\ &= p^n \times J \end{aligned}$$

par hyp. de rec.

car on a vu que $J^2 = pJ$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 1, \ J^n = p^{n-1} J}$

2. (a) On a $A^2 = (I + \lambda J)^2$

On I et λJ commutent

Donc $(I+\lambda J)^2 = I^2 + 2 \times I \times \lambda J + (\lambda J)^2$

$$= I + 2\lambda J + \lambda^2 J^2$$
$$= I + 2\lambda J + \lambda^2 p J$$
$$= I + (2\lambda + \lambda^2 p) J$$

D'où : $\boxed{A^2 = I + (2\lambda + \lambda^2 p) J}$

(b) On cherche λ tel que :

$$A^2 - (2+2p)A + (1+2p)I = 0$$
$$\Longleftrightarrow I + (2\lambda + \lambda^2 p) J - (2+2p)(I + \lambda J) + (1+2p) I = 0$$
$$\Longleftrightarrow I - (2+2p) I + (1+2p) I + (2\lambda + \lambda^2 p) J - (2+2p)\lambda J = 0$$
$$\Longleftrightarrow (2\lambda + \lambda^2 p - 2\lambda - 2\lambda p) J = 0$$
$$\Longleftrightarrow (\lambda^2 p - 2\lambda p) J = 0$$
$$\Longleftrightarrow \lambda^2 p - 2\lambda p = 0$$
$$\Longleftrightarrow \lambda p (\lambda - 2) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \lambda - 2 = 0 \quad \text{car } \lambda \neq 0 \text{ et } p \neq 0$$

Donc $\boxed{\lambda = 2}$

3) (a)

$$A = I + 2J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

(b)

i. On a $A^2 - (2+2p)A + (1+2p)I = 0$

$$\Longleftrightarrow (1+2p) I = (2+2p) A - A^2$$
$$\Longleftrightarrow I = \frac{1}{1+2p} A \left((2+2p) I - A \right)$$
$$\Longleftrightarrow A \times \frac{1}{1+2p} \left((2+2p) I - A \right) = I.$$

Donc $A \in GL_p(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = \frac{1}{1+2p} \left((2+2p) I - A \right)$

D'où $A^{-1} = \frac{1}{1+2p} \left((2+2p) I - (I + 2J) \right)$

$$\Longleftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{1+2p} \left((1+2p) I - 2J \right)$$
$$\Longleftrightarrow \boxed{A^{-1} = I - \frac{2}{1+2p} J}$$

ii. $\left(I - \frac{2}{1+2p}J\right)(I+2J) = I^2 + 2J - \frac{2}{1+2p}J - \frac{4}{1+2p}J^2$

$$= I + \frac{2+4p}{1+2p}J - \frac{2}{1+2p} - \frac{4}{1+2p}pJ$$

$$= I.$$

(c) La division euclidienne de X^n par $X^2-(2+2p)X+1+2p$ s'écrit :

$$X^n = \left(X^2-(2+2p)X+1+2p\right)Q(X) + R(X)$$

où $\deg R < 2$

donc $R(X) = aX+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

D'où :
$$X^n = \left(X^2-(2+2p)X+1+2p\right)Q(X) + aX+b \qquad (*)$$

On cherche les racines de $X^2-(2+2p)X+1+2p$.

$\Delta = \left(-(2+2p)\right)^2 - 4(1+2p)$

$= 4+8p+4p^2-4-8p = 4p^2 > 0$ donc 2 racines réelles.

$r_1 = \frac{2+2p-\sqrt{4p^2}}{2} = \frac{2+2p-2p}{2} = 1$

et $r_2 = \frac{2+2p+2p}{2} = \frac{2+4p}{2} = 1+2p.$

On écrit l'égalité $(*)$ en $X=1$ et $X=1+2p$:

$$\begin{cases} 1^n = 0\times Q(1) + a + b \\ (1+2p)^n = 0\times Q(1+2p) + a(1+2p) + b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 = a + b \\ (1+2p)^n = (1+2p)a + b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1+2p)^n - 1 = 2pa & (L_1 \leftarrow L_2 - L_1) \\ 1+2p-(1+2p)^n = 2pb & L_2 \leftarrow (1+2p)L_1 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = \frac{(1+2p)^n - 1}{2p} \\ b = \frac{1+2p-(1+2p)^n}{2p} \end{cases}$$

D'où $R(X) = \frac{(1+2p)^n-1}{2p}X + \frac{1+2p-(1+2p)^n}{2p}$

ii. On applique l'égalité $(*)$ à A :

$$A^n = \Big(\overbrace{A^2-(2+2p)A+(1+2p)I}^{0}\Big)Q(A) + R(A)$$

$$\iff A^n = R(A)$$

$$\iff A^n = \frac{(1+2p)^n-1}{2p}A + \frac{1+2p-(1+2p)^n}{2p}I$$

$$\iff A^n = \frac{(1+2p)^n-1}{2p}(I+2J) + \frac{1+2p-(1+2p)^n}{2p}I$$

$$\iff A^n = \frac{(1+2p)^n-1+1+2p-(1+2p)^n}{2p}I + \frac{(1+2p)^n-1}{2p}\times 2J$$

$$\iff \boxed{A^n = I + \frac{(1+2p)^n-1}{p}J}$$

d) On a $A = I + 2J$ or I et $2J$ commutent.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = (I + 2J)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} (2J)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k J^k$$

On a $J^k = p^{k-1} J$, mais que si $k \geq 1$.

Donc on sort le terme de rang 0 de la somme

$$= 2^0 J^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k J^k$$

$$= I + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} 2^k \times p^{k-1} J \right)$$

$aJ + bJ = (a+b)J$

$$= I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k p^{k-1} \right) J$$

$$= I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{2^k p^k}{p} \right) J$$

$$= I + \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k \right) J$$

presque un binôme de Newton. Il manque le terme de rang 0

Donc on l'ajoute et on le retranche

$$= I + \frac{1}{p} \left(\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k \right) - 1 \right) J$$

$$= I + \frac{1}{p} \left((1+2p)^n - 1 \right) J$$

$$= I + \frac{(1+2p)^n - 1}{p} J$$

On retrouve bien le résultat de la question c.

(e) La formule obtenue à la question précédente est valable pour $n \geq 0$.

Il n'y a aucune raison, a priori pour qu'elle soit vraie pour $n = -1$.

On essaie quand même :

$$I + \frac{(1+2p)^{-1} - 1}{p} J = I + \frac{\frac{1}{1+2p} - 1}{p} J$$

$$= I + \frac{\frac{1}{1+2p} - \frac{1+2p}{1+2p}}{p} J$$

$$= I + \frac{\frac{-2p}{1+2p}}{p} J$$

$$= I + \frac{-2p}{1+2p} \times \frac{1}{p} J$$

$$= I - \frac{2}{1+2p} J$$

On reconnaît A^{-1}.

$$= A^{-1}.$$

Contre toute attente, l'égalité est aussi vraie pour $n = -1$!