Colle n°7 – Matrices et polynômes

Question préliminaire :

Effectuer dans chaque cas, la division euclidienne de A par B.

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$ et $B = X^2 + 2X + 3$.
2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^3 + X + 2$.
3. $A = X^4 - X^3 + X - 2$, $B = X^2 - 2X + 4$.
4. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ et $B = X^2 - 5X + 4$.

Exercices préparés

Exercice 1 .

Déterminer A^n avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 .

Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3x + 2$.

Exercice 3 .

Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 6x + 9$.

Exercices non préparés

Exercice 4 .

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 puis l'exprimer en fonction de A et de I_3.

2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

3. Déterminer A^n.

Exercice 5 .

On pose $P(X) = X^2 + X$ et $Q(X) = X^2 - X - 2$.

Calculer $(P+Q)(X)$, $P(X^2)$, $Q \circ P$, $P \circ Q$ et Q''

Exercice 6 .

On pose $P(X) = X^3 - 2X$ et $Q(X) = 2X^2 - 1$.

1. Calculer $(P+Q)(X)$, $P(X^2)$, $P \circ Q$ et P''

2. Factoriser $P + Q$

Exercice 7 .

On pose $P(X) = 4X^3 - 2X^2$ et $Q(X) = X + 1$.

1. Calculer $(P+Q)(X)$, $P(X^2)$, $P \circ Q$ et $P^{(3)}$ (vous donnerez la forme développée)

2. Factoriser $P - Q$

Exercice 8 .

Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 1$.

Exercice 9 .

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. ** Déterminer le degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$ en fonction du degré de $P(X)$.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X+1) - P(X) = X^2$.
3. En déduire par somme, l'expression de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 .

On pose :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto X^2 P''(X) - P(X-1) \end{cases}$$

1. Déterminer $\varphi(X^3 - 3X)$

2. Déterminer $\varphi(X)$ et $\varphi(\mathbf{1})$ où **1** est le polynôme constant égal à 1.

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le degré de $\varphi(P)$ ainsi que son coefficient dominant.

4. Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $\varphi(P) = 0$

Exercice 11 .

On pose :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{cases}$$

1. Déterminer $\varphi(X^3 - 3X)$

2. Déterminer $\varphi(X)$ et $\varphi(\mathbf{1})$ où **1** est le polynôme constant égal à 1

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le degré de $\varphi(P)$ ainsi que son coefficient dominant.

4. Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $\varphi(P) = 0$.

Exercice 12 .

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une forme développée du polynôme

$$P = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n}).$$

Indication : on pourra calculer $(1-X)P(X)$.

Exercice 13 .

Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2(X+1)$

Exercice 14 .

Le but de l'exercice est de déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solutions de l'équation : $P(X^2) = (X^2+1)P(X)\,(*)$

1. Quelques exemples :
   a) Le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ est-il solution ?
   b) Le polynôme nul est-il solution ?
   c) Montrer alors qu'aucun polynôme de degré 1 ne peut être solution.
2. Analyse du problème : soit P un polynôme non-nul solution de l'équation $(*)$.
   a) En posant $n = deg(P)$, déterminer la seule valeur de n possible.
   b) En déduire alors tous les candidats.
3. Synthèse du problème : déterminer toutes les solutions.

Exercice 15 .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X\sin\theta + \cos\theta)^n$ par X^2+1.

Exercice 16 .

On considère pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + X^{2^k}\right)$$

Déterminer le degré de P, son coefficient dominant et son terme constant.

Exercice 17 .

Déterminer l'unique polynôme P_n tel que $P_n - P_n' = \dfrac{1}{n!}X^n$.

Exercice 18 .

Calculer les produits LC et CL, avec $L = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 19 .

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leurs inverses :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 20 .

Pour les matrices suivantes, calculer lorsque c'est possible le produit AB et le produit BA

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = {}^tA$
4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A$.

Exercice 21 .

1. Déterminer les matrices carrées de taille 3 qui commutent avec $\mathrm{diag}(1, 2, 3)$.
2. Soient α et β deux réels tels que $\alpha \neq \beta$. Déterminer les matrices carrées de taille 3 qui commutent avec $diag(\alpha, \alpha, \beta)$.
3. Déterminer les matrices (carrées de taille n) qui commutent avec $\mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$.

Exercice 22 .

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les premières puissances de A (à partir de 2) et en déduire une conjecture pour l'expression de A^n, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2. Démontrer ce résultat par récurrence.

Exercice 23 .

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Conjecturez l'expression de A^n puis démontrez votre conjecture par récurrence.

Exercice 24 .

On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression de A^n.

Exercice 25 .

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Conjecturez l'expression de A^n puis démontrez votre conjecture par récurrence.

Exercice 26 .

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Détrminer l'expression de A^n.

Exercice 27 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$dont tous les coefficients valent 1. Calculez J_n^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 28 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent $a \in \mathbb{R}$ sauf ceux sur la diagonales qui valent $b \in \mathbb{R}$. Calculez A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 29 .

Soient les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer B en fonction de A et I_2.
3. En déduire la valeur de B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30 .

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 31 .

Justifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 32 .

Justifier que $A = \begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 33 .

Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice A_m est inversible et calculer A_m^{-1} pour ces valeurs, où A_m est donnée par

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Exercice 34 .

Soit $B = (\min(i,j))_{1\leq 1, j \leq n}$.

1. Déterminer B

2. Déterminer M telle que $B = {}^tMM$.

3. En déduire que $B \in GL_n(\mathbb{R})$ et déterminer B^{-1}.