Colle n°8 – Polynômes

Exercice 1 . Effectuer dans chaque cas la division euclidienne de A par B

1. $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$ et $B = X^2 + 2X + 3$.
2. $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^3 + X + 2$.
3. $A = X^4 - X^3 + X - 2$, $B = X^2 - 2X + 4$.
4. $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ et $B = X^2 - 5X + 4$.

Exercice 2 . Factoriser dans chaque cas $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

1. $P(X) = X^3 - 2X^2 + X - 2$

2. $P(X) = X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 6X + 2$.

3. $P(X) = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ sachant que i est racine.

4. $P(X) = X^4 + 2X^3 + 6X^2 + 8X + 8$ sachant qu'il possède une racine imaginaire pure.

Exercice 3 .
Déterminer dans chaque cas le reste de la division euclidienne de A par B.
n désigne un entier naturel.

1. $A = X^n$ et $B = X^2 - 5x + 6$

2. $A = X^n$ et $B = X^2 - 1$

3. $A = X^n$ et $B = X^2 + 1$

4. $A = X^n$ et $B = (X + 1)^2$

5. $A = X^n$ et $B = (x - 1)^2(x - 2)$

6. $A = (X \sin\theta\ + \cos\theta)^n$ et $B = X^2 + 1$ où θ est un réel quelconque.

7. $A = (X + 1)^n - X^n - 1$ et $B = X^2 - 3X + 2$

8. $A = P(X)$ et $B = (X - a)(X - b)$ où a et b sont des réels distincts.

Exercice 4 .
Dans chaque cas :

a. Déterminer par φ de $P(X) = 4X^2 - 3X + 4$ puis de X^2, X et 1 et enfin de X^k où $k \in \mathbb{N}$.
b. Donner le degré et de coefficient dominant de $\varphi(P)$ dans le cas où P est un polynôme de degré n qu'on écrira sous la forme $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.

1. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP'(X) - P(X) \end{cases}$

2. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & X^2 P''(X) - P(X+1) \end{cases}$

3. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X^2) - P(X)^2 \end{cases}$

4. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{cases}$

5. $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{cases}$

Exercice 5 .

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P(X) = X^3 + X - 10$ sachant qu'il a une racine "simple"
2. $P(X) = X^4 + 6X^3 - 4X^2 - 6X + 3$ sachant qu'il a deux racines "simples"
3. $P(X) = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ sachant que i est racine

Exercice 6 .

Déterminer la multiplicité de la racine α pour les polynômes suivants :

1. $\alpha = 2, P(X) = X^{n+2} - 4X^{n+1} + 4X^n$
2. $\alpha = 3, P(X) = X^3 - 3X^2 - 9X + 27$
3. $\alpha = 2,\ P(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}$

Exercice 7 .

1. Soit P un polynôme tel que pour tout x, $P(\cos x) = 0$. Que peut-on dire de ce polynôme ?

2. Soit P un polynôme tel que pour tout x, $P(x) = P(x+1)$. Que peut-on dire de ce polynôme ?

3. Soit P un polynôme non constant de degré n. Montrer que tout réel admet au plus n antécédents par P.

4. Soit P un polynôme tel que pour tout x, $P(x) = P(\cos x)$. Que peut-on dire de ce polynôme ?

Exercice 8 .

On pose $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{cases}$

1. Déterminer le degré de $\varphi(P)$ et son coefficient dominant en fonction de ceux de $P(X)$

2. Déterminer les antécédents de X^2 et de 0 par φ

3. Retrouvez alors la formule de la somme de k^2 pour k allant de 1 à n .

Exercice 9 .

Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une forme développée du polynôme

$$P = (1+X)(1+X^2)(1+X^4)\dots(1+X^{2^n}).$$

Indication : on pourra calculer $(1-X)P(X)$.

Exercice 10 .

Le but de l'exercice est de déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solutions de l'équation : $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ $(*)$

1. Quelques exemples :
   a) Le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ est-il solution ?
   b) Le polynôme nul est-il solution ?
   c) Montrer alors qu'aucun polynôme de degré 1 ne peut être solution.
2. Analyse du problème : soit P un polynôme non-nul solution de l'équation $(*)$.
   a) En posant $n = deg(P)$, déterminer la seule valeur de n possible.
   b) En déduire alors tous les candidats.
3. Synthèse du problème : déterminer toutes les solutions.

Exercice 11 .

On considère pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + X^{2^k}\right)$$

Déterminer le degré de P, son coefficient dominant et son terme constant.

Exercice 12 .

Déterminer l'unique polynôme P_n tel que $P_n - P_n' = \frac{1}{n!}X^n$.

Exercice 13 .

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(X^2) = P(1 - X)P(X)$$