Chapitre 7

Polynômes à coefficients réels ou complexes

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définition

1.1 Définition des polynômes et des ensembles $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

Définition 1. (Polynôme de degré $n \geq 0$)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ (donc des réels ou des complexes) **avec** $a_n \neq 0$.
La fonction P définie sur $\mathbb{K}$ par :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

est un **polynôme de degré n sur $\mathbb{K}$**. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont les **coefficients de P**.
On note alors : $\deg P = n$ et on dit que a_n **est le coefficient dominant de P**.
Si $a_n = 1$, on dit que P est un **polynôme unitaire**.

Remarque. X est appelée **l'indéterminée**. Nous verrons qu'on peut la remplacer par un nombre x mais aussi par une matrice, ou une fonction ! On ne précise donc jamais dans quel ensemble on prend l'indéterminée : on n'écrit jamais $\forall X \in \ldots$.

Remarque.

- Les polynômes de degré 0 sont appelés les **polynômes constants**.
- Les polynômes réduits à la forme $a_k X^k$ sont appelés **monômes**.

Définition 2. (polynôme nul)
On appelle **polynôme nul** la fonction nulle définie par $P(X) = 0$. On le note 0.

Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$. On a donc : $\boxed{\deg 0 = -\infty}$

Définition 3. (Notations $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$)
On note :

- $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.

Attention ! $P \in \mathbb{R}_n[X]$ signifie donc que P est un polynôme à coefficients réels de degré **inférieur ou égal** à n.

Exemple 1.

- $\mathbb{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels
- $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
- $\mathbb{C}_5[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 5.

Attention ! $\mathbb{R}_2[X]$ n'est pas l'ensemble des polynômes de degré 2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on trouve aussi les fonctions affines qui sont les polynômes de degré inférieur ou égal à 1.

Proposition 1. (Égalité de deux polynômes) (admis)
Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont même degré et mêmes coefficients

Exercice de cours 1. (*Voir la correction*)
Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$2X^3 - 9X^2 + 14X - 15 = (X-3)(aX^2 + bX + c).$$

1.2 Création d'un polynôme dans Scilab

Il faut commencer par créer le polynôme "X" comme suit :

```
--> X=poly(0,"X")
 X  =


   X
```

Ensuite, on peut créer des polynôme de la façon suivante, assez naturelle :

```
--> A=X-3
 A  =


  -3 +X


--> B=2*X^2-3*X+5
 B  =

              2
   5 -3X +2X
```

On peut alors facilement calculer la forme développée du produit :

```
--> A*B
 ans  =

               2    3
 -15 +14X -9X  +2X
```

1.3 Opérations algébriques

Proposition 2. (Opérations algébriques sur les polynômes) (admis)
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les fonctions $x \mapsto P(x) + Q(x)$, $x \mapsto \lambda P(x)$ et $x \mapsto P(x)Q(x)$ sont encore des polynômes, qu'on note respectivement : $P + Q$, λP et PQ. On a alors :

- $(P + Q)(X) = P(X) + Q(X)$,
- $(\lambda P)(X) = \lambda P(X)$,
- $(PQ)(X) = P(X)Q(X)$.

Exercice de cours 2.
Déterminer $P + Q$; λP et PQ dans les cas suivants :

1. $P(X) = X^2 + 3$, $Q(X) = 4X^3 - 3X^2 + 2$ et $\lambda = 2$.
2. $P(X) = X^4 + 1$, $Q(X) = -X^4 + 3X^3$ et $\lambda = -1$.

Proposition 3. (Propriétés de calcul) (admis)
Soient P, Q, R trois éléments de $\mathbb{K}[X]$ et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$.

1. $P + Q = Q + P \quad ; \quad 0 + P = P = P + 0 \quad ; \quad P + (-P) = P - P = 0$
2. $(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P \quad ; \quad \lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q \quad ; \quad \lambda(\mu P) = (\lambda\mu)P = \lambda\mu P$
3. $\lambda P = 0 \iff \lambda = 0$ ou $P = 0$
4. $(PQ)R = P(QR) = PQR$
5. $\lambda(PQ) = (\lambda P)Q = P(\lambda Q) = \lambda PQ$
6. $PQ = QP$
7. $(P + Q)R = PQ + QR$.
8. $PQ = 0 \iff P = 0$ ou $Q = 0$

Remarque. Autrement dit, contrairement à ce qu'on a vu avec les matrices, on calcule avec les polynômes exactement comme avec les nombres.

Proposition 4. (Degré et opérations) (admis)
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a :

1. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$
2. Si $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$
3. $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

1.4 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$.

1.4.1 Division euclidienne

Théorème 5. (Division euclidienne des polynômes) (admis)
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B$.
R est appelé **reste de la division euclidienne de A par B.**
On a alors : $\deg A = \deg(BQ) = \deg B + \deg Q$.

Remarque. Avec Scilab, on calcule comme suit le quotient et le reste de la division euclidienne de deux polynômes :

```
--> A=3*X^5+4*X^2+1
 A  =


        2    5
   1 +4X  +3X



--> B=X^2+2*X+3
 B  =


              2
   3 +2X +X



--> [R,Q]=pdiv(A,B)
 Q  =


                  2    3
   16 +3X -6X  +3X


 R  =


  -47 -41X
```

Exemple 2. (*Voir la correction*)
Effectuons la division euclidienne de $A(X) = 3X^5 + 4X^2 + 1$ par $B(X) = X^2 + 2X + 3$

Exercice de cours 3. (*Voir la correction*)
Effectuer la division euclidienne de $A(X) = 2X^6 + X^4 - 5X + 5$ par $B(X) = X^3 - 2$

Exercice de cours 4. (correction faite en cours, non disponible ici)
Reprendre l'exercice 1 en utilisant une division euclidienne

Exemple 3. (*Voir la correction*)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X - 1$.

Exercice de cours 5. (*Voir la correction*)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 6X + 5$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que $P(X) = X^2 - 6X + 5$ est un polynôme annulateur de A.
   (b) En déduire, à l'aide de la question 1, une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice de cours 6. (*Voir la correction*)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X - a$.

1.4.2 Diviseurs d'un polynôme

Définition 4. (B divise A)
Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que B divise A si

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } A = BQ.$$

Autrement dit : B **divise** A **si et seulement si le reste de le division euclidienne de** A **par** B **est nul.**

Exemple 4.
Montrons que $6X - 12$ divise $X^3 - 8$.

Proposition 6. (propriétés de la divisibilité) (preuve faite en cours)

1. (divisibilité et degré) Si B divise A et que $A \neq 0$, alors $\deg B < \deg A$.
2. (divisibilité et polynômes constants) Un polynôme constant non nul divise n'importe quel polynôme.
3. Si C divise B et que B divise A alors C divise A

2 Dérivées et Racines

2.1 Dérivées d'un polynôme

Définition 5. (Polynôme dérivé)
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
On appelle polynôme dérivée de P, et on note P', le polynôme défini par :

$$P'(X) = na_n X^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + 2a_2 X + a_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k k X^{k-1}.$$

Remarque.

- Si $\deg P = n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\deg P' = n - 1$.
- Le polynôme dérivé d'un polynôme constant est le polynôme nul

Définition 6. (Dérivées successives)
On définit **la dérivée n-ième d'un polynôme** (appelé aussi le **polynôme dérivé d'ordre** n) de la façon suivante :

1. Le polynôme dérivé d'ordre 0, noté $P^{(0)}$ est le polynôme P lui-même : $P^{(0)} = P$.
2. Le polynôme dérivé d'ordre 1, noté $P^{(1)}$ est le polynôme P' : $P^{(1)} = P'$.
3. Le polynôme dérivé d'ordre 2, noté $P^{(2)}$ est le polynôme dérivé de P' : $P^{(2)} = P''$.
4. Le polynôme dérivé d'ordre 3, noté $P^{(3)}$ est le polynôme dérivé de $P^{(2)}$: $P^{(3)} = P'''$.
5. Plus généralement, le polynôme dérivé d'ordre k, noté $P^{(k)}$ est le polynôme dérivé de $P^{(k-1)}$:
$$P^{(k)} = \left((P^{(k-1)}\right)'$$
.

Exercice de cours 7.

1. Calculer les dérivées successives de $P(X) = X^4 + 2X^2 - 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées successives de X^n.

2.2 Racines

Définition 7. (Racine d'un polynôme)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est une racine de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$

Théorème 7. (Théorème de D'Alembert-Gauss) (admis)
Tout polynôme à coefficients réels ou complexes et de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine complexe.

Attention ! Cette racine n'est pas forcément réelle !
Par exemple $P(X) = X^2 + 1$, polynôme à coefficient réels, n'admet pas de racine réelle.

Proposition 8. (Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels) (preuve faite en cours)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\alpha \text{ est racine de } P \text{ si et seulement si } \overline{\alpha} \text{ est racine de } P.$$

Exercice de cours 8.
On pose $P(X) = X^3 - 4X^2 + 21X - 34$.

1. Montrer que 2 est la seule racine réelle de P.
2. Montrer que $X - 2$ divise P. En déduire les deux autres racines (complexes) de P.

Théorème 9. (Caractérisation d'une racine par la divisibilité) (preuve faite en cours)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\alpha \text{ est racine de } P \text{ si et seulement si } X - \alpha \text{ divise } P,$$

autrement dit : ssi il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$.

Théorème 10. (Généralisation) (admis)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, des éléments **2 à 2 distincts** de $\mathbb{K}$.

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \text{ sont racines de } P \text{ si et seulement si } (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_p) \text{ divise } P.$$

Exercice de cours 9.
Soit $P(X) = 2X^2 - 6X + 4$.
Montrer que 1 et 2 sont racines de P. Retrouver la factorisation de P.

Corollaire 11. (Nombre maximum de racines d'un polynôme) (admis) Un polynôme de degré n possède au plus n racines.
Autrement dit :
Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et que P admet $n+1$ racines, alors P est le polynôme nul.
En particulier : le seul polynôme qui admet une infinité de racine est le polynôme nul.

Exercice de cours 10.
Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(0) = Q(0)$, $P(1) = Q(1)$ et $P(2) = Q(2)$. Montrer que $P = Q$.

2.3 Racines multiples

Définition 8. (Racine d'ordre k)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
On dit que α est une racine d'ordre k de P si et seulement si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(X) = (X-\alpha)^k Q(X) \text{ avec } Q(\alpha) \neq 0.$$

Autrement dit, ssi :

$$(X-\alpha)^k \text{ divise } P \text{ mais } (X-\alpha)^{k+1} \text{ ne divise plus } P.$$

k est alors appelé **ordre de multiplicité de α.**

Remarque. Cas particuliers :

- Une racine d'ordre 1 est appelée **racine simple**
- Une racine d'ordre 2 est appelée **racine double**
- etc...

Exemple 5. Le trinôme à coefficients réels
Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- **Si** $\Delta > 0$
  - P admet 2 racines réelles simples distinctes r_1 et r_2
  - et P se factorise dans $\mathbb{R}$ en : $P(X) = a(X - r_1)(X - r_2)$.
-
- **Si** $\Delta = 0$
  - P admet une racine réelle double r
  - et P se factorise dans $\mathbb{R}$ en : $P(X) = a(X - r)^2$.
- **Si** $\Delta < 0$
  - P n'admet aucune racine réelle et ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.
  - P admet 2 racines complexes conjuguées r et $\overline{r}$
  - et P se factorise dans $\mathbb{C}$ en : $P(X) = a(X - r)(X - \overline{r})$.

Théorème 12. (critère de multiplicité d'une racine) (admis)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
α est une racine d'ordre k de P si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots P^{(k-1)}(\alpha) = 0$.
En particulier :

- α est racine simple ssi $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$,
- α est racine double ssi $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0$ et $P''(\alpha) \neq 0$,
- α est racine au moins double ssi $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.

Exercice de cours 11.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et P le polynôme défini par :

$$P(X) = X^{2n} + nX^{2n-1} - (2n+1)X^n + n.$$

1. Vérifier que 1 est racine de P.
2. Déterminer son ordre de multiplicité.

3 Exemples de factorisation

Exemple 6.
Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 - 3X^3 + X^2 + 3X - 2$.

Exemple 7.
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $Q(X) = X^4 + X^2 + 1$.

Exercice de cours 12.
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$.

Exercice de cours 13.
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^4 - X^2 + 1$. En déduire, en utilisant le résultat de l'exemple 7, la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ de $P = X^8 + X^4 + 1$.

4 Preuves et solutions

Solution rédigée de l'exercice de cours 1

On trouve : $a = 2$, $b = -3$ et $c = 5$.
(retour à l'exercice 1)

Solution rédigée de l'exemple 2

On trouve : $Q(X) = 3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$ et $R(X) = -41X - 47$.
(retour à l'exemple 2)

Solution rédigée de l'exercice de cours 3

On trouve : $Q(X) = 2x^3 + x + 4$ et $R(X) = -3x + 13$.
(retour à l'exercice 3)

Solution rédigée de l'exemple 3

On sait qu'il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que $X^n = (X-1)Q(X) + R(X)$ avec $\deg R < \deg(X-1) = 1$.
Donc $\deg R = 0$ et donc R est un polynôme constant.
On pose $R(X) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$.
On a donc :

$$X^n = (X-1)Q + c$$

On évalue en $X = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} & 1^n = (1-1) \times Q(1) + c \\ \iff & 1 = c. \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{c = 1.}$
Le reste de la division euclidienne de X^n par $X - 1$ est donc le polynôme constant égal à 1 :

$$\boxed{X^n = (X-1)Q(X) + 1.}$$

(retour à l'exemple 3)

Solution rédigée de l'exercice de cours 5

On sait qu'il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que $X^n = (X^2 - 6x + 5)Q + R$ avec $\deg R < \deg(X^2 - 6x + 5)$ donc $\deg R \leq 1$. Donc $R(X) = aX + b$.
On a donc :

$$X^n = (X^2 - 6x + 5)Q + aX + b$$

On évalue en $X = 1$ et en $X = 5$ (qui sont les racines de $X^2 - 6x + 5$), on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} 1^n = 0 + a + b \\ 5^n = 0 + 5a + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} b = 1 - a \\ 5^n = 0 + 5a + 1 - a \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} b = 1 - a \\ a = \dfrac{5^n - 1}{4} \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} b = 1 - \dfrac{5^n - 1}{4} = \dfrac{5 - 5^n}{4} \\ a = \dfrac{5^n - 1}{4} \end{array}\right.$$

Le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 6x + 5$ est donc le polynôme $R(X) = \dfrac{5^n - 1}{4}X + \dfrac{5 - 5^n}{4}$.

$$X^n = (X^2 - 6x + 5)Q + \frac{5^n - 1}{4}X + \frac{5 - 5^n}{4}.$$

(*retour à l'exercice 5*)

Solution rédigée de l'exercice de cours 6

On sait qu'il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que $P(X) = (X - a)Q(X) + R(X)$ avec $\deg R < \deg(X - a) = 1$.
Donc $\deg R = 0$ et donc R est un polynôme constant.
On pose $R(X) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$.
On a donc :

$$P(X) = (X - a)Q(X) + c$$

On évalue en $X = a$, on obtient :

$$P(a) = (a - a) \times Q(a) + c$$
$$\iff P(a) = c.$$

D'où : $\boxed{c = P(a).}$

Le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$ est donc le polynôme constant égal à $P(a)$:

$$\boxed{P(X) = (X - a)Q(X) + P(a).}$$

Cette égalité est donc vraie pour tout polynôme P et tout réel a !
(*retour à l'exercice 6*)