Chapitre 8

Ensembles et Applications

Table des matières

1 Ensembles

1.1 Définitions de base sur les ensembles

Définition 1. (Définitions de base sur les ensembles)
On considère A et B deux ensembles.
$x \in A$ signifie que l'élément x appartient à l'ensemble A.
$A \subset B$ signifie que A est inclus dans B *i.e.* tout élément de A est un élément de B, $\forall x \in A, x \in B$.
$A = B$ signifie que A est égal à B, et :

$$A = B \iff A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

Il existe un unique ensemble n'ayant aucun élément. Cet ensemble est appelé l'ensemble vide et est noté $\emptyset$. L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble E.

Exemple 1.
Si on considère les ensembles suivants :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad ; \quad B = \{2, 3, 4\}$$

. Compléter les relations ci-dessous par $\subset$ ou $\in$:

$$B \subset A \quad ; \quad 2 \in A \quad ; \quad \{2, 3\} \subset B \quad ; \quad 4 \in B \quad ; \quad \emptyset \subset B$$

1.2 Parties d'un ensemble

Définition 2. (Ensemble des parties d'un ensemble)
Soit E un ensemble. On appelle partie de E tout ensemble A inclus dans E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. :

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$

Exemple 2.
Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors

$$\mathcal{P}(E) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\Big\}$$

Définition 3. (Opérations sur les parties d'un ensemble)
Étant donné A et B deux parties de E, on construit les nouvelles parties de E suivantes :

- $A \cap B = \{x \in E, x \in A$ et $x \in B\}$, intersection de A et B,
- $A \cup B = \{x \in E, x \in A$ ou $x \in B\}$, union de A et B,
- $\overline{A} = \{x \in E, x \notin A\}$, complémentaire de A dans E,
- $A \setminus B = \{x \in E, x \in A$ et $x \notin B\} = A \cap \overline{B}$, différence de A et B.

Exemple 3.
Soit l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et deux sous-ensembles $A = \{0, 1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ et $C = \{0, 5\}$.
Donner $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap (B \cup C)$, $A \cup (B \cap C)$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\cap A \cup B$, $\cap A \cap B$.

Proposition 1. (Règles de calcul sur les parties) (admis) Soit A, B et C des parties de E.

1. $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Exercice de cours 1.
Soit $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2, 7]$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $C \setminus B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cap (B \cup C)$, $A \setminus (C \setminus B)$.

Définition 4. (Parties disjointes)
On dit que deux parties A et B de E sont disjointes si et seulement si $A \cap B = \emptyset$

Exemple 4.

- A et $\overline{A}$ sont disjointes
- $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, décomposition de $A \cup B$ en trois parties deux à deux disjointes.

1.3 Plusieurs façons de définir un ensemble

Exemple 5.
Trois façons de définir le même ensemble :

1. $A = \left\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\right\}$ (définition explicite)
2. $A = \left\{k^2 \,|k \in [\![1\ ;\ 9]\!]\ \right\}$ (définition par image directe)
3. $A = \left\{n \in [\![1\ ;\ 100]\!] \middle| \exists k \in \mathbb{Z}, n = k^2\ \right\}$ (définition implicite)

Exemple 6.
Donner la forme explicite des ensembles suivants :

1. $A = \left\{(2x, 3y, x + y - 1), (x, y) \in \{1, 2\}^2\ \right\}$
2. $B = \left\{\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a^2 & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{N} \cap [-1, 2]\right\}$
3. $C = \left\{n \in [\![1, 10]\!]\ \middle|\ \exists k \in \mathbb{N}, n = 3k + 1\right\}$
4. $D = \left\{x \in \mathbb{R}\ \middle|\ 0 \leq x < 4\right\}$

1.4 Produit cartésien

Définition 5. (Produit cartésien de deux ensembles)
On considère deux ensembles E et F. Le produit cartésien de E par F est par définition l'ensemble de tous les couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$. On a ainsi :

$$(x, y) \in E \times F \iff x \in E \text{ et } y \in F$$

$E \times E$ est noté E^2 et $E \times E \times \ldots \times E$ (p fois) est noté E^p.
Par exemple, on notera $\mathbb{R}^2, \mathbb{N}^2, \ldots$.

Exemple 7.
Si $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$, alors

$$E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Plus généralement, on pose $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_p \in E_p\}$.
$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est l'ensemble des p-uplets (ou p-listes) $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ avec $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, $\ldots$, $x_p \in E_p$.

2 Applications

2.1 Définition

Définition 6. (Application (ou fonction))
Soit E et F deux ensembles $f : E \to F$ est une application (ou une fonction) de l'ensemble de départ E vers l'ensemble d'arrivée F. À chaque élément $x \in E$ est associé un unique élément de F noté $f(x) = y$ appelé image de x par f. On dit que x est un antécédent de y par f.
On note :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

NB : Si $E \subset \mathbb{R}$, on dit que f **est une fonction d'une variable réelle**

Remarque. Les termes *fonction* et *application* sont donc synonymes. Le terme application est plutôt utilisé en géométrie et en algèbre linéaire alors que celui de fonction est utilisé en analyse.

Remarque. Déterminer le domaine de définition d'une fonction réelle f c'est en fait déterminer la plus grande partie D de $\mathbb{R}$ telle que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ soit définie.

Exemple 8.

- $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array} \right.$ n'est pas une application car 1 n'a pas d'image.

  Par contre $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{array} \right.$ est une application.

- $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array} \right.$ est une application.

- $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x-y) \end{array} \right.$ est une application et :

  - $\varphi\Big((2;3)\Big) = (1,-1)$
  - $\varphi\Big((3;3)\Big) = (3,0)$
  - $\varphi\Big((0;0)\Big) = (0,0)$

- $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 2x+y \end{array} \right.$ est une application et :

  - $\psi\Big((2;3)\Big) = 7$
  - $\psi\Big((3;3)\Big) = 9$
  - $\psi\Big((0;0)\Big) = 0$

Définition 7. (Application identité)
On appelle application identité de E l'application de E dans E qui à tout $x \in E$ associe x. On la note id_E.

Définition 8. (Composée de deux applications)
Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. On appelle composée de f par g l'application de E dans G notée $g \circ f$ et définie par :

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Attention ! Bien vérifier les ensembles de départ et d'arrivée avant d'effectuer une composition.

2.2 Applications injectives, surjectives, bijectives

2.2.1 Définition

Définition 9. (Applications injectives, surjectives, bijectives)
Soit $f : E \to F$.

- f est **injective** si : Deux éléments distincts de E n'ont jamais la même image

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \text{ tout élément de } F \text{ a au plus un antécédent dans } E \\ &\Longleftrightarrow \left[\forall (x,y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \implies x = y\right] \end{aligned}$$

- f est **surjective** si : tout élément de F a au moins un antécédent dans E

$$\Longleftrightarrow \forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

- f est **bijective** si : f est injective et surjective.

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \text{ tout élément de } F \text{ a un et un seul antécédent dans } E \\ &\Longleftrightarrow \forall y \in F, \text{ l'équation } f(x) = y \text{ admet une unique solution dans } E \end{aligned}$$

Exemple 9.
L'application $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $h(n) = n^2 + 1$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

2.2.2 Cas des fonctions d'une variable réelle

Pour montrer qu'une fonction d'une variable réelle est injective ou surjective, on étudie en général ses variations. On a d'ailleurs le critère suivant :

Proposition 2. (Critère d'injectivité sur un intervalle pour les fonctions)
Si une fonction d'une variable réelle est strictement monotone, alors elle est injective.

Exercice de cours 2. Préciser si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives.

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{cases}$

2. $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x^2) \end{cases}$

3. $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$

2.3 Réciproque d'une bijection

Remarque. Une bijection est une application bijective.

Théorème 3. (Réciproque d'une bijection) (admis)
Soit $f : E \to F$ une application.

1. f est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
2. Cette application g est unique et est appelée réciproque de f et est notée f^{-1}.

Remarque. Pour montrer qu'une application est bijective, on peut donc chercher une réciproque.

Exemple 10.
Montrer que la fonction $\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$ est bijective et préciser sa réciproque.

Exemple 11.
Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x+2 \end{cases}$ et bijective est déterminer sa réciproque.

Exemple 12.
Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x-1} \end{cases}$ est une bijection.

Exemple 13.
Une application à plusieurs variables
Montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x-y) \end{cases}$ est bijective et déterminer sa réciproque.