Chapitre 9

Limites de fonctions et continuité

Table des matières

1 Limites de fonctions

1.1 Limite en un "point"

Dans toute cette section, I désigne un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I ou sur $I \setminus \{x_0\}$.

1.1.1 Limite finie en un point

Définition 1. (Limite réelle en x_0)
Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0, si :

....

De plus la proposition suivante assure que cette limite est unique et on note :

....

Proposition 1. (Unicité de la limite dans le cas fini)

Si la limite de f en x_0 existe et est finie, elle est unique.

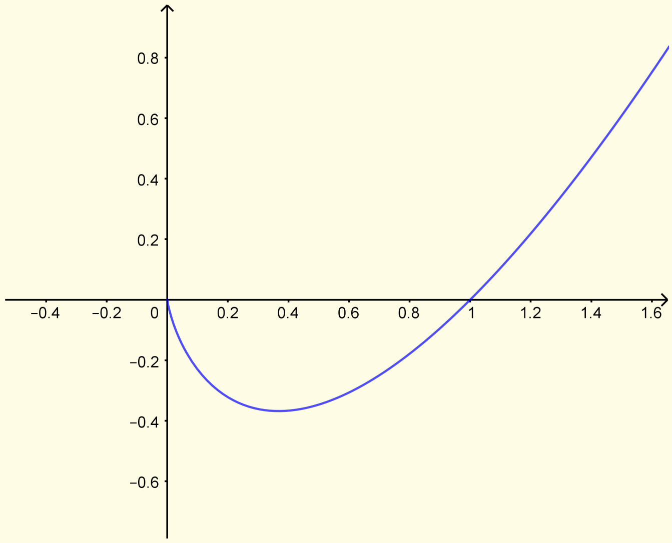
Preuve de la proposition 1

Supposons qu'il existe deux limites finies distinctes ℓ et ℓ' de f en x_0.
Posons alors $\varepsilon = \dfrac{|l - l'|}{3}$.
$\ell \neq \ell'$ donc ε est un réel strictement positif.
En appliquant la définition de la limite à ℓ avec ce ε, on déduit qu'il existe un réel η tel que $\forall x \in I$ tq $|x - x_0| < \eta$, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
De même, en appliquant la définition de la limite à ℓ' avec ce ε, on déduit qu'il existe un réel η' tel que $\forall x \in I$ tq $|x - x_0| < \eta'$, $|f(x) - \ell'| < \varepsilon$.

Prenons alors un réel $x \in I$, tel que $|x - x_0| < \min(\eta, \eta')$.
On a :
$$|\ell - \ell'| = |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|l - l'|.$$
On a donc $|l - l'| < \dfrac{2}{3}|l - l'|$! Absurde !

Donc f ne peut pas posséder deux limites finies distinctes en x_0.

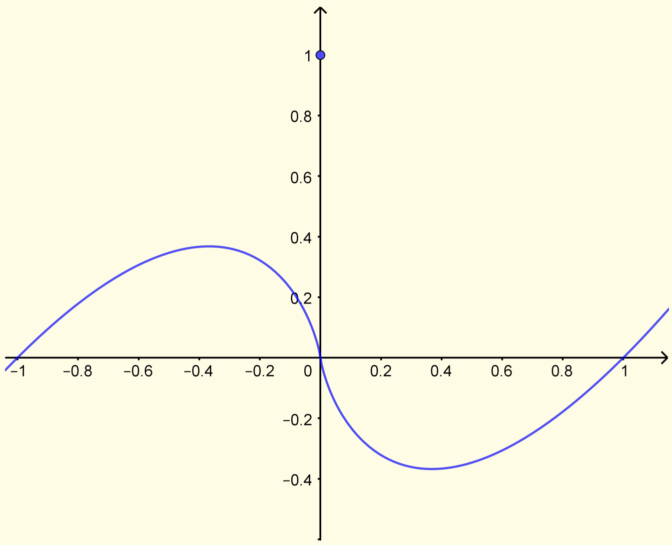
Exemple 1. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x\ln x$.



On lit graphiquement :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \ldots\ldots\ldots \text{ et } \lim_{x\to 0} f(x) = \ldots\ldots\ldots$$

Exemple 2. On considère les fonction g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}$ par $g(x)=x\ln(|x|)$ et $h(x)=\begin{cases} x\ln(|x|) \text{ si } x\neq 0 \\ 1 \text{ si } x=0 \end{cases}$.



h a une limite en 0, par contre g n'a pas de limite en 0 au sens strict de la définition !

1.1.2 Limite finie à gauche ou à droite

Définition 2. (Limite à gauche en x_0)
Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que f **tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 par valeurs inférieures**, si :

....

L'unicité de la limite s'étend et ℓ se nomme alors **limite de f à gauche en x_0**. On note :

....

ou encore

....

Définition 3. (Limite à droite en x_0)
Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que f **tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 par valeurs supérieures**, si :

....

L'unicité de la limite s'étend et ℓ se nomme alors **limite de f à droite en x_0**. On note :

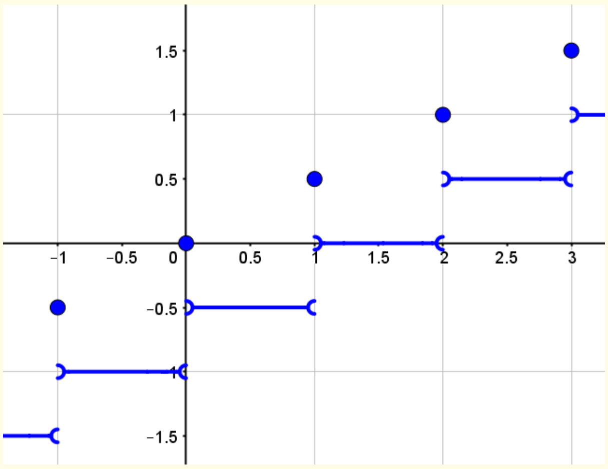
....

ou encore

....

Remarque. Si x_0 est un point intérieur à I, f admet une limite en x_0 si et seulement si elle admet une limite à gauche et à droite en x_0 et que ces limites sont égales.

Exemple 3.
Soit $h : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\lfloor -x \rfloor$.
Voici la courbe représentative de h :



On lit graphiquement :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ <}} h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \lim_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ >}} h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad h(1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a donc ici $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ <}} h(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ >}} h(x)$ et $h(1)$ qui sont toutes différentes !

1.1.3 Limite infinie en un point

Définition 4. (Limite infinie en un point)

- f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

  ....

- f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

  ....

On note alors :

....

et

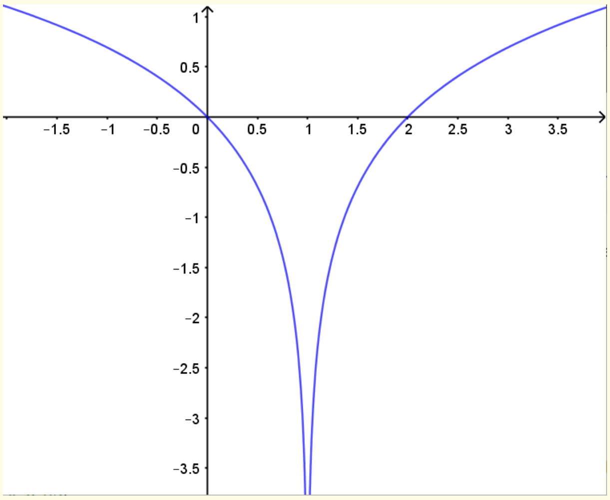
....

Remarque. On définit de même que précédemment une limite infinie par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures

Remarque. Graphiquement, une limite infinie en un point se traduit par une asymptote verticale.

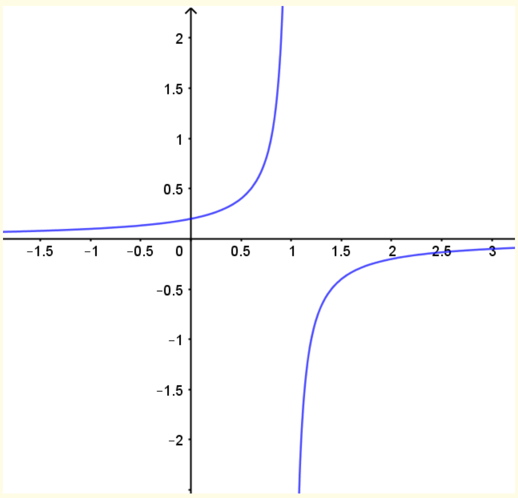
Exemple 4.
$f : x \mapsto \ln(|x-1|)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



Exemple 5.
$g : x \mapsto \dfrac{1}{5(1-x)}$.

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ et } \lim_{x\to 1^+} g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



1.2 Limites à l'infini

Définition 5. (Limite finie ou infinie en l'infini)

1. Si f est définie (au moins) sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.
   - Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, si :

     ....
   - On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, si :

     ....
   - On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, si :

     ....
2. Si f est définie (au moins) sur un intervalle de la forme $]-\infty; a]$.
   - Soit $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$, si :

     ....
   - On dit que f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, si :

     ....
   - On dit que f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$, si :

     ....

2 Existence et opération sur les limites

2.1 Opérations sur les limites

Dans tous les tableaux ci-dessous, a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Proposition 2. (Somme et produit) (admis)

$\lim_{x\to a} g(x)$ \ $\lim_{x\to a} f(x)$	$-\infty$	ℓ	$+\infty$
$-\infty$			
ℓ'			
$+\infty$			
	$\lim_{x\to a} f(x)+g(x)$		

$\lim_{x\to a} g(x)$ \ $\lim_{x\to a} f(x)$	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$
0			
$\ell' \neq 0$			
$\pm\infty$			
	$\lim_{x\to a} f(x)g(x)$		

(*) : appliquer la règle des signes pour savoir si c'est $+\infty$ ou $-\infty$.

Proposition 3. (Inverse) (admis)

$\lim_{x\to a} f(x)$	$0^{\text{ni+ ni−}}$	0^+ ou 0^-	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$
$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$				

NB : $0^{\text{ni+ ni−}}$ signifie que $f(x)$ tend vers 0 sans rester positif ou négatif au voisinage de a.

(*) : appliquer la règle des signes pour savoir si c'est $+\infty$ ou $-\infty$.

Proposition 4. (Quotient) (admis)

$\lim_{x\to a} g(x)$ \ $\lim_{x\to a} f(x)$	0	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$
$0^{\text{ni+ ni−}}$			
0^+ ou 0^-			
$\ell' \neq 0$			
$\pm\infty$			
	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$		

Attention ! Il y a donc 4 formes indéterminées : ....

2.2 Limite d'une composée

Proposition 5. (Composée de deux fonctions) (admis)
Soit $a, b, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = c \end{array} \right. \quad \text{alors}$$

Proposition 6. (Composée d'une suite et d'une fonction) (admis)
Soit $\ell, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to \ell} f(x) = c \end{array} \right. \quad \text{alors}$$

2.3 Passage à la limite dans les inégalités

Proposition 7. (Passage à la limite dans les inégalités) (admis)
Soient f et g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 et possédant une limite (finie ou infinie) en x_0.

- Si $\forall x \in I \backslash \{x_0\},\ f(x) \leq g(x)$, alors ....
- Si $\forall x \in I \backslash \{x_0\},\ f(x) < g(x)$, alors ....
- En particulier :
  - si $\forall x \in I \backslash \{x_0\},\ f(x) \leq c$, alors ....
  - si $\forall x \in I \backslash \{x_0\},\ f(x) < c$, alors ....

Remarque. On a des résultats similaires pour les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

Attention ! Si on a une inégalité stricte au départ, elle devient large en passant à la limite.

2.4 Théorèmes de comparaison et théorème de la limite monotone

2.4.1 Théorèmes de comparaison

Proposition 8. (Théorèmes de comparaison) (admis)
Soient f et g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 telles que :

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ f(x) \leq g(x).$$

1. ....
2. ....

Proposition 9. (Théorèmes d'encadrement) (admis)
Soient g, f et h trois fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0 telles que

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

....

Version avec la valeur absolue :
Soient f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0, et a un réel tel que

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ |f(x) - a| \leq g(x).$$

....

Cas particulier fréquent :
Soient f, g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0, et a un réel tel que

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\},\ |f(x)| \leq g(x).$$

....

Remarque.

- On a des résultats similaires pour les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
- On n'appelle plus ce théorème le "théorème des gendarmes" !

Exercice de cours 1.
Déterminer la limite de $x \mapsto \dfrac{\cos^3(x)}{x}$ en $-\infty$.

Exercice de cours 2. Un résultat à retenir !
Soient f et g deux fonctions définies sur I sauf peut-être en x_0. Prouver que :

$$\text{Si } \begin{cases} f \text{ est bornée sur } I \setminus \{x_0\} \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \text{........................}$$

2.5 Limites à Connaître

2.5.1 Croissances comparées

Proposition 10. (Croissances comparées) (admis)

- En $+\infty$:
  - ....
  - ....
  - ....
- En 0 : ....
- En $-\infty$: ....

Remarque. Moyen mnémotechnique : En présence d'une F.I. : $\ln(x) <<$puissance de $x << \exp(x)$

Remarque. Si $\alpha < 0$ ou $\beta < 0$ ou $n < 0$, les résultats précédents restent vrais mais il n'y a plus de F.I. donc ne pas citer les croissances comparées !

2.5.2 Limites de taux d'accroissement à (re)connaître

Proposition 11. (Limites de taux d'accroissement à (re)connaître) (admis)

1. Dérivée de la fonction $\ln$ en 1 : ....
2. Dérivée de la fonction $\exp$ en 0 : ....
3. Dérivée de la fonction $\cos$ en 0 : ....
4. Dérivée de la fonction $\sin$ en 0 : ....
5. Dérivée de la fonction $\tan$ en 0 : ....
6. Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en 1 : ....

Remarque. On peut aussi retrouver la dernière égalité avec la technique de la quantité conjuguée

3 Continuité

3.1 Continuité en un point, continuité sur un intervalle

3.1.1 Continuité en un point

Dans toute cette section, I désigne un intervalle, $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I.
Donc f **est une fonction définie en** x_0**.**

Définition 6. (Continuité en un x_0)
On dit que f est **continue** en x_0 si :

....

3.1.2 Continuité sur un intervalle

3.1.2.1 Définition et continuité des fonctions usuelles

Définition 7. (Continuité sur un intervalle I)

- f est dite continue sur un intervalle I si ....
- f est dite continue si ....

Remarque.
Graphiquement, une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe sur I est en "un seul morceau"

Proposition 12. (Continuité des fonctions usuelles) (admis)
Les fonctions usuelles, hormis la partie entière, ($x \mapsto x^n$, $\cos$, $\sin$, $\tan$, $\ln$, $\exp$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x|$) sont continues.

3.1.2.2 Opérations sur les fonctions continues

Proposition 13. (Continuité et opérations algébriques) (admis)
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et λ un réel. Alors :

1. $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues sur I.
2. Si de plus g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Corollaire 14. (Continuité des fonctions polynômes et rationnelles) (admis)

1. Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

Proposition 15. (Continuité et composition) (admis)
Soient f et g deux fonctions telles que $f \circ g$ soit défini sur un intervalle I.

Si f et g sont continues alors $f \circ g$ est continue sur I.

Remarque. Ces deux propositions permettent de se ramener à la continuité des fonctions usuelles.

Exemple 6.

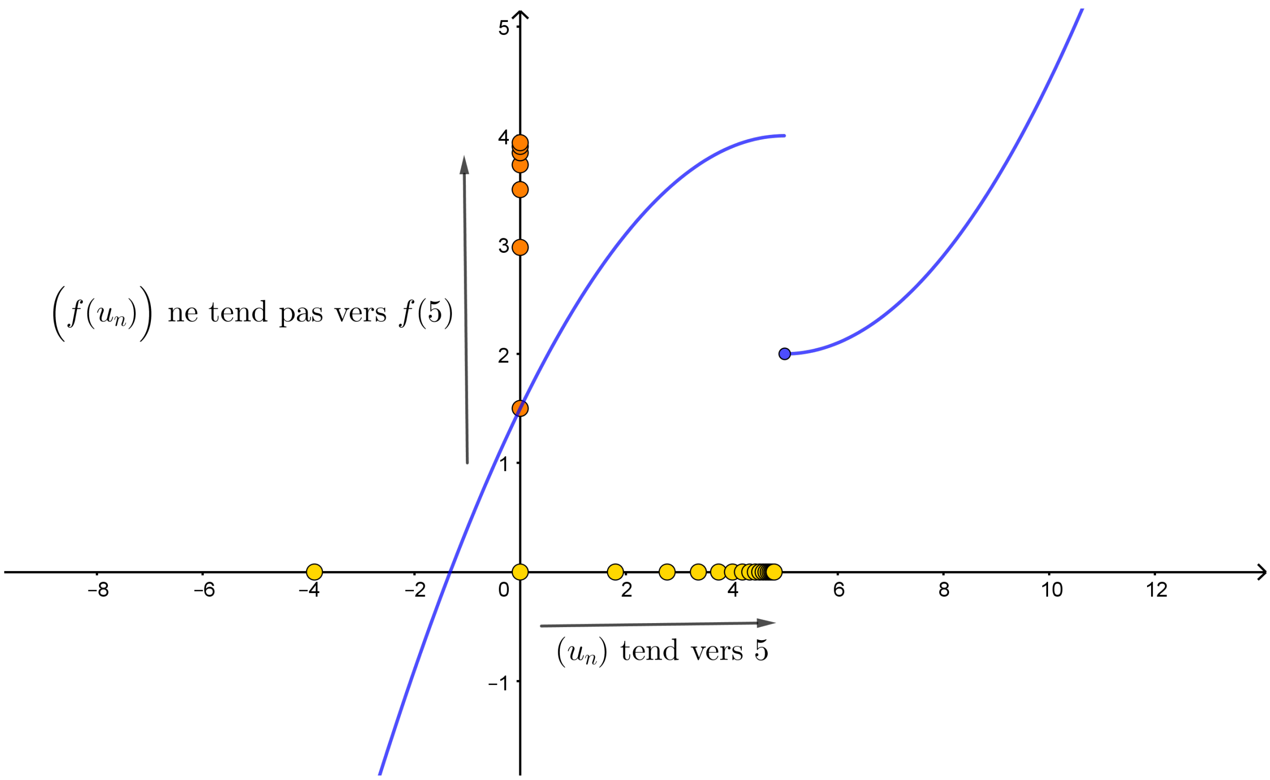
Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3.1.2.3 Continuité et passage à la limite pour les suites

Proposition 16. (Continuité et passage à la limite pour les suites) (admis)
Soit f une fonction et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans D_f convergeant vers un réel $a \in D_f$.
Si f est continue en a, alors la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et :

....

Attention ! La figure ci-dessous illustre le fait que si f n'est pas continue en a, on n'a pas forcément $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.



3.2 Prolongement par continuité, continuité par morceaux

3.2.1 Prolongement par continuité

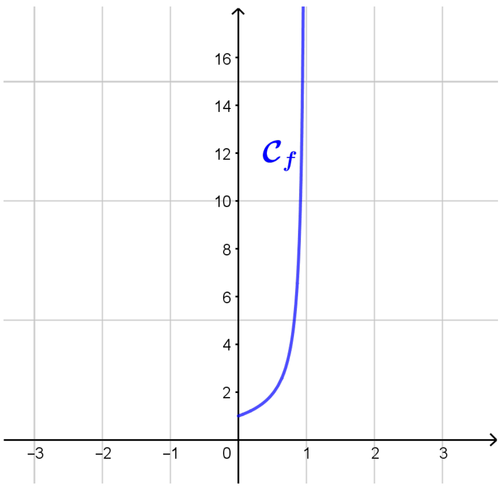
Définition 8. (Prolongement par continuité)
Soit I un intervalle contenant un réel x_0 et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ mais non définie sur x_0.
Si f admet une limite finie ℓ en x_0, alors on dit que f **se prolonge par : continuité en** x_0.
En effet, on peut alors définir la fonction $\widetilde{f}$ ("f tilde") sur I par

$$\forall x \in I,\ \widetilde{f}(x) =$$

La fonction $\widetilde{f}$ ainsi définie est alors continue en x_0 et coïncide avec f sur $I \setminus \{x_0\}$. On dit que c'est **la prolongée de f par continuité sur en** x_0. De plus, si f est continue sur $I \setminus \{x_0\}$ alors $\widetilde{f}$ est continue sur I.

Exercice de cours 3.
Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x(1-x)}$.

- Démontrer que f est continue sur $]0,1[$.
- f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? En 1 ?



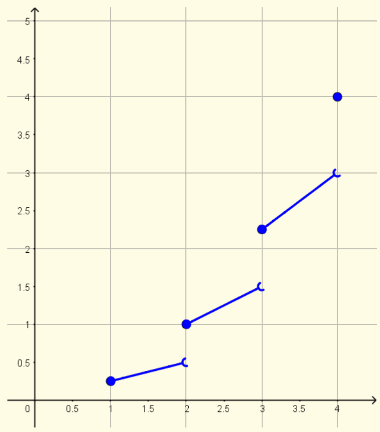
3.2.2 Fonctions continues par morceaux

Définition 9. (Fonction continue par morceaux sur un intervalle)
Une fonction est dite continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision

$$a < a_1 < \ldots < a_n < b$$

telle que f admet une limite finie à gauche en a et à droite en b et à gauche et à droite (pas forcéments égales en chaque a_i les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Exemple 7.
La fonction h définie sur $[0, 4]$ par : $h : x \mapsto \dfrac{1}{4}x\lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur $[1, 4]$.



3.3 Théorèmes de continuité sur un intervalle

3.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires et image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition 17. (Théorème des valeurs intermédiaires) (*Voir la preuve*)
Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$ alors :

....

Exemple 8.
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

Si $f(a)f(b) \leq 0$ alors ....

Exercice de cours 4.
Montrer que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Proposition 18. (Image d'un intervalle par une fonction continue.) (*Voir la preuve*)

L'image d'un intervalle par une fonction continue ....

3.3.2 Théorème des valeurs extrêmes

Remarque. On appelle **segment** un intervalle fermé borné (de la forme $[a, b]$).

On va énoncer le même théorème de deux façons différentes :

Proposition 19. (Théorème des valeurs extrêmes - énoncé 1) (admis)

....

Proposition 20. (Théorème des valeurs extrêmes - énoncé 2) (admis)
Si une fonction f est continue sur $[a, b]$, alors elle possède sur $[a, b]$ un minimum m et un maximum M et il existe α et β appartenant à $[a, b]$ tels que :

....

Et on a :

$$f\Big([a, b]\Big) = \text{..............................}$$

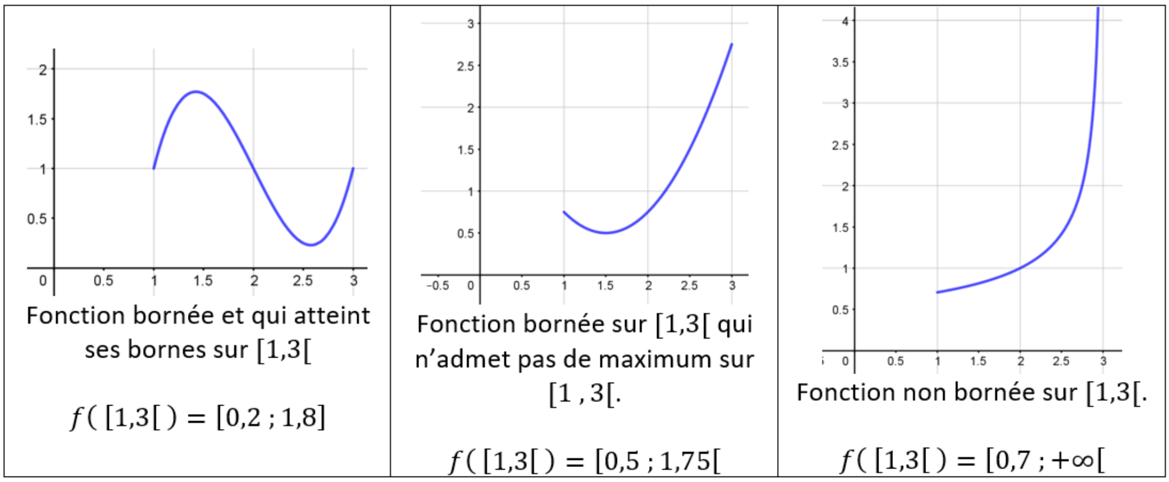
Corollaire 21. (Image d'un segment par une fonction continue) (admis)

....

Attention ! $f\Big([a, b]\Big) \neq [f(a), f(b)]$. en général !

Remarque. C'est seulement l'image d'un segment par une fonction continue qui est assuré d'être un segment. En général, l'image d'un intervalle par une fonction continue n'est pas forcément un intervalle de même nature, comme le montre la remarque suivante.

Remarque. Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b[$ (ouvert en b), on peut avoir tous les cas possibles.
Le tableau ci-dessous présente les courbes de trois fonctions définies et continues sur $[1, 3[$ et trois situations différentes. Dans le deuxième et le troisième cas, f n'admet pas de maximum sur $[1, 3[$, donc $\max\limits_{[a,b]} f$ n'existe pas.



3.3.3 Théorème de la bijection

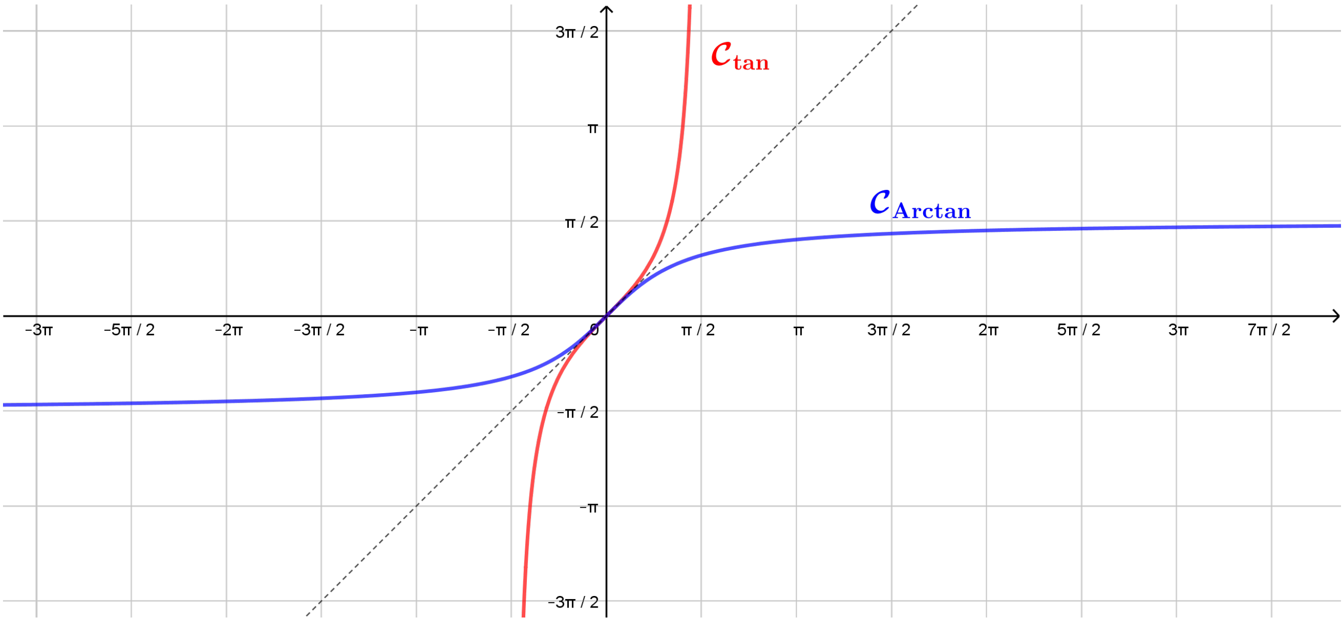
Proposition 22. (Théorème de la bijection) (admis)
Si f est strictement monotone et continue sur un intervalle I alors f est une bijection de I sur $f(I)$.

De plus, f^{-1} est une bijection **continue** de $f(I)$ vers I **de même monotonie que** f.

Remarque. Dans ce cas, les courbe de f et de f^{-1}, tracées dans un repère orthonormé, sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

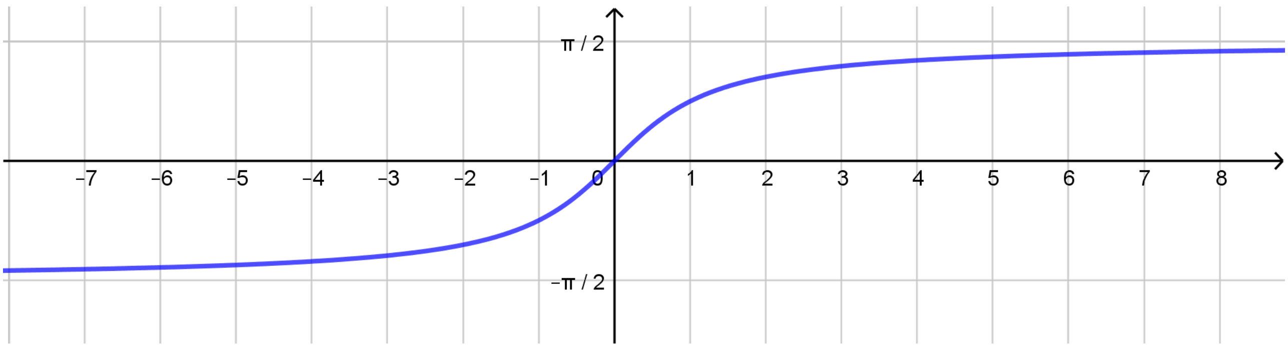
3.4 Nouvelle fonction : la fonction arctangente

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Or $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$. Donc, d'après le théorème de la bijection, $\tan$ est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ vers $]-\infty, +\infty[$.
Donc il existe une fonction, que l'on nomme **arctangente** $(\arctan)$, qui est **strictement croissante et continue** telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan x) = x$ et $\forall x \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan x) = x$.



On retiendra pour l'instant ces éléments de la fonction Arctan :

1. La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et est impaire. Il faut retenir l'allure de sa courbe et ses limites en $\pm\infty$:



2. Connaître les trois valeurs $\mathrm{Arctan}(0) = 0$, $\mathrm{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\mathrm{Arctan}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

3. Retenir que $\mathrm{Arctan}\, x$ est "l'arc" (c'est-à-dire l'angle) compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut x.

4 Preuves et solutions

Preuve du théorème 17

On suppose $f(a) \leq f(b)$. On a donc : $f(a) \leq r \leq f(b)$.
On construit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence comme suit : On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- Si $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) < r$ on pose $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$.
- sinon (c-à-d si $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) \geq r$), on pose $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$

Montrons par récurrence qu'on a, pour tout entier n, $u_n \leq v_n$.
Initialisation (n=0) : On a posé $u_0 = a$ et $v_0 = b$, on a donc bien $u_0 \leq v_0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leq v_n$ est vraie. Montrons $u_{n+1} \leq v_{n+1}$.
Il y a deux cas possibles :

- Si $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) < r$, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \leq \dfrac{v_n + v_n}{2} = v_n = v_{n+1}$. sinon, si $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) \geq r$, on a $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \geq \dfrac{u_n + u_n}{2} = u_n = u_{n+1}$.

Dans les deux cas, on a bien $u_{n+1} \leq v_{n+1}$.
Conclusion : Par récurrence, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Montrons maintenant que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \begin{cases} \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n & \text{Si } f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) < r, \\ u_n - u_n & \text{si } f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) \geq r. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{-u_n + v_n}{2} & \text{Si } f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) < r, \\ 0 & \text{si } f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) \geq r. \end{cases}$$

Dans le deux cas, on a : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} - v_n = \begin{cases} v_n - v_n & \text{Si } f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) < r, \\ \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n & \text{si } f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) \geq r. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{u_n - vn}{2} & \text{Si } f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) < r, \\ 0 & \text{si } f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) \geq r. \end{cases}$$

Dans le deux cas, on a : $v_{n+1} - v_n \leq 0$.

Enfin, montrons que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et donc converge vers 0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n + v_n}{2} - v_n & \text{Si } f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) < r, \\ u_n - \dfrac{u_n + v_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) \geq r. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{u_n - v_n}{2} & \text{Si } f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) < r, \\ \dfrac{u_n - v_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right) \geq r. \end{cases}$$

Dans les deux cas, on a : $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n - b_n)$.

Donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers une même limite que nous appelons c.
Or, par construction, $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \leq r \leq f(v_n)$.
De plus, f étant continue sur $[a, b]$, on peut passer cette inégalité à la limite. On obtient alors $f(c) \leq r \leq f(c)$ et donc $f(c) = r$.

Si maintenant on a $f(a) \geq f(b)$, on pose $g = -f$. On a alors $g(a) \leq g(b)$ et $-r$ est entre $g(a)$ et $g(b)$. Donc, d'après la première partie, il existe un réel c tel que $g(c) = -r$ c'est-à-dire $-f(c) = -r$, c'est-à-dire $f(c) = r$.
(*retour au théorème 17*)

Preuve de la proposition 18

Montrons que pour tout $y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 \leq y_2 \implies [y_1, y_2] \subset f(I)$.
Soit $y_1, y_2 \in I$ tels que $y_1 \leq y_2$ et soit $y \in [y_1, y_2]$. Comme $y_1, y_2 \in I$, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, sur $[x_1, x_2]$ (ou $[x_2, x_1]$ si $x_2 \leq x_1$), il existe $x \in [x_1, x_2]$ (ou $[x_2, x_1]$ si $x_2 \leq x_1$), tel que $f(x) = y$ et donc $y \in f(I)$.
(*retour à la proposition 18*)