Feuille d'exercices n° 9 - Limites et continuité

Exercice 1. (★) Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.
2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x}$.
3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.
4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+3x-1}{x-1}$.

Exercice 2. (★★) Déterminer les limites suivantes lorsqu'elles existent :

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.
2) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
3) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x).\ln(\ln(x))$.
4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\cos(x)}{x^2+1}$.
5) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-\sin(x)}$.
6) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2+3x-1}{x-1}$.
7) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$.
8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x+x^3}{2^x}$.
9) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x+3)-\ln(x-1)$.

Exercice 3. (★★) Dans chaque cas suivant, déterminer la limite de f aux bornes de son domaine de définition.

1. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.
2. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.
3. $f(x) = x^{1/x}$.
4. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\sqrt{3x^2+1}-2}$.

Exercice 4. (★★)- limites classique Déterminer les limites suivantes aux points considérés.

1. $\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/3}}$ en 0 et $+\infty$.
2. $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ en 0.
3. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ en 0^+.
4. $\dfrac{\sqrt{x}}{e^x-1}$ en 0 et $+\infty$.
5. $\dfrac{x+2}{x^2\ln x}$ en 0^+.
6. $4x^2+(\ln x)+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0.
7. $\dfrac{e^x-e^3}{x-3}$ en $x_0 = 3$.

Exercice 5. (★★)- formes indéterminées en un réel non nul Dans chaque cas, constater que la limite demandée est une F.I. Se ramener alors à une limite en 0 par un changement de variable puis calculer la limite.

1. $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ en $x_0 = 2$.
2. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ en $x_0 = 1$.
3. $(x-2)^2\ln(x^3-8)$ en $x_0 = 2^+$.
4. $\dfrac{\ln x}{x^3-1}$ en $x_0 = 1$.

Exercice 6. (★★)- Fonctions définies par morceaux
Étudier dans chaque cas la continuité de la fonction sur le point "à problème".
Dans les cas de non continuité, aurait-on pu choisir une autre valeur qui rende la fonction continue ?

$$a(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x^2} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \qquad d(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x+1}} & \text{si } x \neq -1, \\ 0 & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

$$b(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \qquad e(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}, \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$$c(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 7. (★★)- Prolongement par continuité

1. On définit la fonction suivante :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^x & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{xe^x}{1-e^x} & \text{si} \quad x < 0. \end{cases} \end{array}.$$
Peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

2. Même question avec les fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $(x \neq 0)$.
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$, $(0 < x < 1)$.
   (c) $f(x) = x^\alpha$, $(x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$.
   (d) $f(x) = \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$, $(x \neq 0)$.

Exercice 8. (★★) - Prolongement par continuité - 2
Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en x_0 et le cas échéant, préciser la valeur en x_0 qui rend la fonction continue.

$$a(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x-2}} \text{ en } x_0 = 2. \quad b(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} \text{ en } x_0 = 4.$$

Exercice 9. (★★) - Continuité et limites (*Voir l'indication ici*)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x).$$
Montrer que f est constante.

Exercice 10. (★★★) - Continuité et limites - 2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et en 1 telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x^2).$$
Montrer que f est constante.

Exercice 11. (★★) (Inspiré du Bac 1990)
On considère, pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction f_α définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^\alpha \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Donner l'expression de f_2, f_1 et $f_{\frac{1}{2}}$ puis démontrer que pour tout $\alpha > 0$, f_α est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f_2, f_1 et $f_{\frac{1}{2}}$ en $+\infty$. Donner ensuite plus généralement la limite de f_α en $+\infty$ selon la valeur de α.
3. (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
   $$\varphi(x) = \ln x + x + 1.$$
   Étudier les variations de φ. Établir que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution β.
   (b) Pour $x > 0$, exprimer $f_1'(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$. En déduire les variations de f_1.
4. **Une suite implicite**
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation $f_1(x) = n$ admet une unique solution α_n.
   (b) Établir que $f(e^n) \leq n$. en déduire que $\alpha_n \geq e^n$. En déduire la limite de (α_n).
   (c) Prouver que $\ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{n}{\alpha_n}$.
   (d) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha_n}{e^n} = 1$.

Indications

Exercice 9 - Indication. (*retour à l'exercice 9*)
Poser $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ puis prouver que $\Big(f(u_n)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et considérer sa limite.