# Devoir Surveillé n° 3

*Soignez au maximum la rédaction et la présentation.* ***Encadrez vos résultats***
*Vous pouvez traiter les exercices dans le désordre, mais, à l'intérieur d'un exercice, vous devez traiter les questions dans l'ordre.* ***Toute question non numérotée ne sera pas notée !***
*Bon travail !*

## Exercice 1 : Applications directes du cours

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer si $A$ est inversible et si oui, donner son inverse.

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Déterminer si $A$ est inversible et si oui, donner son inverse.

3. Effectuer la division euclidienne du polynôme $A = X^4 - 3X^2 + X + 1$ par $B = X^2 + 1$.

4. (a) Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine $3$ dans le polynôme $P(X) = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$.
   (b) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X^2 - 1$ divise $Q(X) = nX^{2n} - 2X^{2n-1} + 2X - n$.

6. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{e^k}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2k(k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n}{3}$.

## Exercice 2

On considère les matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$.

2. En déduire deux réels $a$ et $b$ tels que $A^2 = aA + bI$.

3. En déduire un polynôme annulateur de $A$.

4. Montrer que $A$ est inversible et donner son inverse en fonction de $A$ et de $I$.

5. Montrer qu'il existe deux suites de réels $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n I.$$

   On vérifiera qu'on a $a_0 = 0$ ; $b_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = -a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

6. Démontrer que $(a_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre $2$. En déduire l'expression de $(a_n)$ puis celle de $(b_n)$.

7. En déduire une expression de $A^n$ en fonction de $A$ et de $I$.

# Exercice 3

**Première partie : Calcul des puissance d'une matrice**
On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $P^3$. Montrer alors que $P$ est inversible et déterminer son inverse. On donnera aussi au passage un polynôme annulateur de $P$.

2. Montrer que $P^{-1}AP = L$. On donnera le détail des calculs.

3. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $A^n = PL^nP^{-1}$.

4. On pose $J = L - I$. Calculer $J^3$.

5. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton que, pour tout entier $n \geq 2$ :
$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

6. En déduire, pour $n \geq 2$, les neufs coefficients de $L^n$. Vérifiez que votre résultat reste vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

7. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Deuxième partie : Etude de 3 suites conjointes.**
On considère les trois suites $(u_n)$, $(v_n)$, et $(w_n)$ définies par : $u_1 = 1$, $v_1 = 0$, $w_1 = 2$ et, pour tout entier $n \geq 1$ :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n, \\ v_{n+1} = v_n + 2w_n, \\ w_{n+1} = 2u_n + w_n. \end{cases}$$

8. Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)$ ? Donner $u_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

9. Compléter la fonction Scilab suivante pour quelle affiche la valeur de $v_n$ et de $w_n$ pour la valeur de $n$ entrée par l'utilisateur.

```
n=input("Entrez une valeur de n>=1 : ")
u=
v=
w=
for k =
            v=
            w=
end
disp("v_n vaut : ",v)
disp("w_n vaut : ",w)
```

10. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_{n+1} = AX_n$.

   (b) En déduire, sans justifier, une expression de $X_n$ en fonction de $A$ et de $X_1$.

   (c) Déduire des questions précédentes que, pour tout entier $n \geq 1$ :
   $$v_n = 2n(n-1) \text{ et } w_n = 2n.$$

## Exercice 4 : une suite de Polynômes

1. Soit $(P_n)$ la suite de polynômes définie par : $P_0(X) = 1$ et $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - 2XP_n(X)$.
   (a) Donner les polynômes $P_1$, $P_2$ et $P_3$.
   (b) Déterminer,, sans le démontrer, le degré et le coefficient dominant de $P_n$.
2. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$.
   Comme pour les polynômes, on note :
   - $f''$ la dérivée seconde d'une fonction,
   - $f^{(3)}$ sa dérivée 3ème,
   - ...,
   - $f^{(n)}$ sa dérivée $n$-ième.
   - etc.

   On a en particulier : $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

   (a) Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x$ :
   $$f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x).$$
   (c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel $x$ :
   $$f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x).$$
   (d) En déduire, pour $n \geq 1$, une relation entre $P_{n+1}$, $P_n$ et $P_{n-1}$.
   (e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(-X) = (-1)^n P_n(X)$.
   (f) En déduire la parité des polynômes $P_n$ selon la valeur de $n$.

## Question subsidiaire

Déterminer tout les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $(P')^2 = 4P$.

*On pourra commencer par étudier le degré de $P$.*