Devoir Surveillé n° 3

Soignez au maximum la rédaction et la présentation. ***Encadrez vos résultats***
Vous pouvez traiter les exercices dans le désordre, mais, à l'intérieur d'un exercice, vous devez traiter les questions dans l'ordre. ***Toute question non numérotée ne sera pas notée !***
Bon travail !

Exercice 1 : Applications directes du cours

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer si A est inversible et si oui, donner son inverse.

   $\det A = 2 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 - 1 = -3 \neq 0$ donc $\boxed{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$

   et $A^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.. C'est-à-dire : $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Déterminer si A est inversible et si oui, donner son inverse.

   A est une matrice triangulaire supérieure sans 0 sur sa diagonale, donc elle est inversible et son inverse est une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont les inverses de ceux de A :

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & \frac{1}{2} & z \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Il reste à déterminer x, y et z.
   On a :

   $$\begin{aligned} & A^{-1} \times A = I_3 \\ \iff & \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & \frac{1}{2} & z \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} 1 & 4+2x & 3-3x+\frac{y}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2}+\frac{z}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \iff & \begin{cases} 4+2x = 0 \\ 3-3x+\frac{y}{2} = 0 \\ -\frac{3}{2}+\frac{z}{2} = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = -2 \\ 3+6+\frac{y}{2} = 0 \\ \frac{z}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x = -2 \\ y = -18 \\ z = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -18 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

3. Effectuer la division euclidienne du polynôme $A = X^4 - 3X^2 + X + 1$ par $B = X^2 + 1$.

$$\begin{array}{rrrr|rr}
X^4 & -3X^2 & +X & +1 & X^2 & +1 \\
\cline{1-2}\cline{5-6}
-(\ X^4 & +X^2) & & & X^2 & -4 \\
\cline{1-2}
& -4X^2 & +X & +1 & & \\
\cline{2-3}
-(& -4X^2 & -4) & & & \\
& & X & +5 & &
\end{array}$$

Donc :

$$\boxed{X^4 - 3X^2 + X + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 4) + X + 5}$$

4. (a) Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 3 dans le polynôme $P(X) = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$.
Il suffit de constater que $P(3) = 0$, $P'(3) = 0$ et $P^{(2)}(3) \neq 0$. Donc 3 est racine double.

(b) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme P.
3 est racine double, donc $(X - 3)^2$ divise P.
On effectue la division euclidienne de P par $(X - 3)^2 = X^2 - 6X + 9$:

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
X^4 & -5X^3 & +4X^2 & +3X & +9 & X^2 & -6X & +9 \\
\hline
-(X^4 & -6X^3 & +9X^2) & & & X^2 & +X & 1 \\
\cline{1-3}
& X^3 & -5X^2 & +3X & +9 & & & \\
& -(X^3 & -6X^2 & +9X) & & & & \\
\cline{2-4}
& & X^2 & -6X & +9 & & & \\
& & -(X^2 & -6X & +9) & & & \\
\cline{3-5}
& & & & 0 & & &
\end{array}$$

On obtient : $P(X) = (X - 3)^2(X^2 + X + 1)$.
Comme le discriminant du trinôme $X^2 + X + 1$ est strictement négatif, on s'arrête et on a fini la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\boxed{P(X) = (X - 3)^2(X^2 + X + 1)}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X^2 - 1$ divise $Q(X) = nX^{2n} - 2X^{2n-1} + 2X - n$.
On remarque que $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$. Il suffit donc de vérifier que 1 et -1 sont racines de Q.
Or $Q(1) = n \times 1^{2n} - 2 \times 1^{2n-1} + 2 \times 1 - n = n - 2 + 2 - n = 0$
et $Q(-1) = n \times (-1)^{2n} - 2 \times (-1)^{2n-1} + 2 \times (-1) - n = n + 2 - 2 - n = 0$
(on a $(-1)^{2n-1} = -1$ car $2n - 1$ est impair.)

6. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{e^k}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{e^k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{e}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{e}\right)^k 1^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{e} + 1\right)^n \\
&= \left(\frac{1+e}{e}\right)^n
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{e^k} = \left(\frac{1+e}{e}\right)^n}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2k(k+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n}{3}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{2k(k+1)}{(n+1)(n+2)} &= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} k(k+1) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} k^2 + k \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k \right) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} n(n+1) \left(\frac{2n+1}{6} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{2}{\cancel{(n+1)}(n+2)} \times n\cancel{(n+1)} \times \frac{2n+4}{6} \\
&= \frac{2n \times 2\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+2)} \times 6} \\
&= \frac{4n}{6} \\
&\boxed{= \frac{2n}{3}}
\end{aligned}$$

Exercice 2

On considère les matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.

   On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

   Remarque suite à la correction :
   Quelques élèves ont fait des erreurs de calcul. Mais l'immense majorité a bien traité cette question.

2. En déduire deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI$.

$$\begin{aligned} aA + bI &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ -4a & 2a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ -4a & 2a & -a+b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Le coefficient à la 2ème ligne et 1ère colonne nous apprend qu'on doit choisir $\boxed{a = -1}$.

   Celui à la 2ème ligne et 2ème colonne nous apprend qu'on doit choisir $\boxed{b = 2}$.

   On a bien l'égalité demandée : $aA + bI = -A + 2I = \begin{pmatrix} -1+2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 1+2 \end{pmatrix} = A^2$

   On a donc :

$$\boxed{A^2 = -A + 2I}.$$

   Remarque suite à la correction :
   Beaucoup ont bien trouvé a et b. Il fallait bien donner explicitement a et b et encadrer les résultats.

3. En déduire un polynôme annulateur de A.

   On a $A^2 = -A + 2I \iff A^2 + A - 2I = 0$ donc $\boxed{X^2 + X - 2 \text{ est un polynôme annulateur de } A}$.

   Remarque suite à la correction :
   Beaucoup ont oublié de donner le polynôme. Il ne suffisait pas d'écrire l'égalité $A^2 + A - 2I = 0$.

4. Montrer que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et de I.
   On a :

$$\begin{aligned} & A^2 = -A + 2I \\ \iff & A^2 + A = 2I \\ \iff & \frac{1}{2}(A^2 + A) = I \\ \iff & \frac{1}{2}(A(A+I)) = I \\ \iff & A \times \frac{1}{2}(A+I) = I \end{aligned}$$

   Donc A est inversible et $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I)}$.

5. Montrer qu'il existe deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n I.$$

On vérifiera qu'on a $a_0 = 0$; $b_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = -a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

On pose $\mathscr{P}(n)$: « Il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$ »
Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation ($n = 0$)
On a $A^0 = I = 0 \times A + 1 \times I$.
On a donc bien $A^0 = a_0 A + b_0 I$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

Remarque suite à la correction :
Beaucoup d'élèves ont mal rédigé cette partie de la récurrence. La partie hérédité a été mieux rédigée.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$.
On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times (a_n A + b_n I) \\ &= a_n A^2 + b_n A \\ &= a_n(-A + 2I) + b_n A \\ &= -a_n A + 2a_n I + b_n A \\ &= (-a_n + b_n)A + 2a_n I \end{aligned}$$

On a donc bien $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}$ avec $\boxed{a_{n+1} = -a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = 2a_n}$.

Conclusion : par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

6. Démontrer que (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire l'expression de (a_n) puis celle de (b_n).
On a, pour tout entier $n \geq 0$, $a_{n+2} = -a_{n+1} + b_{n+1} = -a_{n+1} + 2a_n$. (a_n) est donc bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et on a :

$$\boxed{a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n}$$

Remarque suite à la correction :
Beaucoup d'élèves ont considéré que l'égalité $a_{n+2} = -a_{n+1} + b_{n+1}$ était la formule de récurrence d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Et ont cherché l'expression de a_n en résolvant l'équation $x^2 = -x + 1$.
Il s'agissait d'une grosse confusion qui menait à des calculs bien plus compliqués que ceux demandés.
Au niveau de la rédaction, il faut écrire qu'on reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et qu'on va résoudre son équation caractéristique.
On résout l'équation caractéristique :
$x^2 = -x + 2 \iff x^2 + x - 2 = 0$ dont les deux solutions sont -2 et 1.
On a donc :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda \times 1^n + \mu \times (-2)^n \\ \iff &\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda + \mu \times (-2)^n \end{aligned}$$

On applique cette égalité avec $n = 0$ et $n = 1$. Sachant que $a_0 = 1$ et $a_1 = -a_0 + b_0 = 1$. On a donc :

$$\begin{cases} 0 &= \lambda + \mu \\ 1 &= \lambda - 2\mu \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -\lambda &= \mu \\ 1 &= 3\lambda \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \mu &= -\frac{1}{3} \\ \lambda &= \frac{1}{3} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n = \frac{1-(-2)^n}{3}$$

De plus, on sait que $b_{n+1} = 2a_n$ donc

$$\begin{aligned} b_n &= 2a_{n-1} \\ &= 2 \times \frac{1-(-2)^{n-1}}{3} \\ &= \frac{2-2(-2)^{n-1}}{3} \\ &= \frac{2+(-2)(-2)^{n-1}}{3} \\ &= \frac{2+(-2)^n}{3} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1-(-2)^n}{3} \text{ et } b_n = \frac{2+(-2)^n}{3}}$$

.

7. En déduire une expression de A^n en fonction de A et de I.
   On a, d'après la question précédente :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1-(-2)^n}{3} A + b_n = \frac{2+(-2)^n}{3} I}.$$

Exercice 3

Première partie : Calcul des puissance d'une matrice

On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^3. Montrer alors que P est inversible et déterminer son inverse. On donnera aussi au passage un polynôme annulateur de P.

   On trouve $\boxed{P^3 = I}$ donc $P \times P^2 = I$. Donc :

   $$\boxed{P \text{ et inversible, d'inverse } P^{-1} = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

   Au passage, on remarque que l'égalité $P^3 = I$ équivaut à $P^3 - I = 0$ donc :

   $$\boxed{X^3 - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } P.}$$

   Remarque suite à la correction :
   Comme dans la question 3 de l'exercice 2, beaucoup d'élèves confondent le polynôme annulateur $X^3 - I$ avec l'évaluation de ce polynôme en A : $A^3 - I$. On a $A^3 - I = 0$ mais $X^3 - 1 \neq 0$! Si on note Q ce polynôme, cela revient à confondre Q et $Q(A)$.

2. Montrer que $P^{-1}AP = L$. On donnera le détail des calculs.

   $$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $A^n = PL^nP^{-1}$.
   On démontre déjà le résultat pour $n = 1$:

   $$P \times L \times P^{-1} = P \times P^{-1} \times A \times P \times P^{-1} = I \times A \times I = A$$

   On démontre ensuite le résultat par récurrence :
   On pose $\mathscr{P}(n)$: « $A^n = PL^nP^{-1}$ »
   Initialisation $(n = 0)$
   On a $A^0 = I$ et $PL^0P^{-1} = PPIP^{-1} = PP^{-1} = I$.
   Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$.

On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= PLP^{-1} \times PL^nP^{-1} \\ &= PLP^{-1}PL^nP^{-1} \\ &= PLIL^nP^{-1} \\ &= PLL^nP^{-1} \\ &= PL^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

4. On pose $J = L - I$. Calculer J^3.

On a : $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Et donc $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

5. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

On a $L = I + J$ donc $L^n = (I+J)^n$. Or I **et** J **commutent**. Donc :

$$\begin{aligned} L^n = (I+J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times I^{n-k} \times J^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \times I^{n-k} \times J^k \quad \text{car } J^k = 0 \text{ pour } k \geq 3. \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \times I \times J^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \times J^k \\ &= \binom{n}{0} \times J^0 + \binom{n}{1} \times J^1 + \binom{n}{2} \times J^2 \\ &= J^0 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2 \\ &\boxed{= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2} \end{aligned}$$

Remarque suite à la correction :
Beaucoup d'élèves ont oublié de préciser que I et J commutent avant d'utiliser la formule du binôme. De plus, il est important de justifier pourquoi la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times I^{n-k} \times J^k$ devient $\sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} \times I^{n-k} \times J^k$

6. En déduire, pour $n \geq 2$, les neufs coefficients de L^n. Vérifiez que votre résultat reste vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

$$\begin{aligned} L^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{L^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Pour $n = 0$, on obtient bien la matrice $I = L^0$ et pour $n = 1$, on obtient bien la matrice $L = L^1$. La formule obtenue est donc encore valable pour $n \in \{0, 1\}$.

7. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{aligned} A^n = PL^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\boxed{= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Deuxième partie : Etude de 3 suites conjointes.
On considère les trois suites (u_n), (v_n), et (w_n) définies par : $u_1 = 1$, $v_1 = 0$, $w_1 = 2$ et, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n, \\ v_{n+1} = v_n + 2w_n, \\ w_{n+1} = 2u_n + w_n. \end{cases}$$

8. Que pouvez-vous dire de la suite (u_n) ? Donner u_n pour tout entier $n \geq 1$.
   La suite (u_n) est constante ! Comme $u_1 = 1$, on a :

$$\boxed{\forall \geq 1, \quad u_n = 1.}$$

9. Compléter la fonction Scilab suivante pour quelle affiche la valeur de v_n et de w_n pour la valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
    n=input("Entrez une valeur de n>=1 : ")
    u=
    v=
    w=
    for k =
                v=
                w=
    end
    disp("v_n vaut : ",v)
    disp("w_n vaut : ",w)
```

```
n=input("Entrez une valeur de n>=1 : ")
   u=1
   v=0
   w= 2
   for k =2:n \\Attention il fallait partir de 2 !!!
               v= v+2*w
               w= 2*u+w
   end
   disp("v_n vaut : ",v)
   disp("w_n vaut : ",w)
```

10. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_{n+1} = AX_n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n + 2w_n \\ 2u_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$$

   On a donc bien $\boxed{X_{n+1} = AX_n.}$

(b) En déduire, sans justifier, une expression de X_n en fonction de A et de X_1.
On en déduit, par analogie avec les suites géométriques que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = A^{n-1}X_1.}$$

Remarque : *S'il fallait démontrer cette égalité, on le ferait par une récurrence qui serait très simple.*

(c) Déduire des questions précédentes que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$v_n = 2n(n-1) \text{ et } w_n = 2n.$$

On a, d'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
X_n &= A^{n-1}X_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n-1)(n-2) & 1 & 2(n-1) \\ 2(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n-1)(n-2) & 1 & 2(n-1) \\ 2(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)(n-2) + 2(n-1) \times 2 \\ 2(n-1) + 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)((n-2) + 2) \\ 2n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)n \\ 2n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ On a donc bien : $\boxed{v_n = 2n(n-1) \text{ et } w_n = 2n.}$

Exercice 4 : une suite de Polynômes

1. Soit (P_n) la suite de polynômes définie par : $P_0(X) = 1$ et $P_{n+1}(X) = P_n'(X) - 2XP_n(X)$.

   (a) Donner les polynômes P_1, P_2 et P_3.

$$\begin{aligned} P_1(X) &= P_0'(X) - 2XP_0(X) \\ &= 0 - 2X \times 1 \\ &\boxed{= -2X} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(X) &= P_1'(X) - 2XP_1(X) \\ &= -2 - 2X(-2X) \\ &= -2 + 4X^2 \\ &= \boxed{4X^2 - 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(X) &= P_2'(X) - 2XP_2(X) \\ &= 8X - 2X(4X^2 - 2) \\ &= 8X - 8X^3 + 4X \\ &= \boxed{-8X^3 + 12X} \end{aligned}$$

   (b) Déterminer, sans le démontrer, le degré et le coefficient dominant de P_n.
   Il semble bien que $\deg P_n = n$ et que son coefficient dominant soit $(-2)^n$.
   Remarque : *S'il fallait démontrer cette égalité, on le ferait par récurrence.*
   L'initialisation serait très simple.
   Pour l'hérédité, on écrirait que, par hypothèse de récurrence : $P_n(X) = (-2)^n X^n + Q_n(X)$ *avec* $\deg Q_n \leq n - 1$
   Donc

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= (-2)^n nX^{n-1} + Q_n'(X) - 2X\Big((-2)^n X^n + Q_n(X)\Big) \\ &= (-2)^n nX^{n-1} + Q_n'(X) - 2X \times (-2)^n X^n - 2XQ_n(X) \\ &= (-2)^n nX^{n-1} + Q_n'(X) + (-2)^{n+1} X^{n+1} - 2XQ_n(X) \\ &= (-2)^{n+1} X^{n+1} + 2^n nX^{n-1} + Q_n'(X) - 2XQ_n(X) \end{aligned}$$

   Or $\deg\left(2^n nX^{n-1}\right) = n - 1$ *et* $\deg Q_n'(X) \leq n - 2$ *et* $\deg\Big(2XQ_n(X)\Big) = 1 + \deg(Q_n) \leq n$
   Donc, $\deg\left(2^n nX^{n-1} + Q_n'(X) - 2XQ_n(X) \leq n\right)$ *Donc* $(-2)^{n+1} X^{n+1}$ *est bien le terme de plus haut degré de* P_{n+1}.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$.
Comme pour les polynômes, on note :

- f'' la dérivée seconde d'une fonction,
- $f^{(3)}$ sa dérivée 3ème,
- ...,
- $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
- etc.

On a en particulier : $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$.

(a) Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.

$$f'(x) = \boxed{-2xe^{-x^2}}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2)e^{-x^2} + (-2x) \times \left(-2xe^{-x^2}\right) \\ &= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \\ &= \boxed{(4x^2-2)e^{-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= 8xe^{-x^2} + (4x^2-2) \times (-2x)e^{-x^2} \\ &= 8xe^{-x^2} + (-8x^3+4x)e^{-x^2} \\ &= \boxed{(-8x^3+12x)e^{-x^2}} \end{aligned}$$

(b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x :

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x).$$

Initialisation
On vient de démontrer ce résultat pour $n = 1$, $n = 2$ et même $n = 3$ et il est également vrai pour $n = 0$ car $f^{(0)}(x) = f(x) = 1 \times f(x) = P_0(x) \times f(x)$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose l'égalité vraie au rang n. Montrons la au rang $n+1$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= P_n'(x)f(x) + P_n(x)f'(x) \qquad \left(\text{car } f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)\right) \\ &= P_n'(x)f(x) + P_n(x) \times (-2x)e^{-x^2} \\ &= P_n'(x)f(x) - P_n(x) \times 2xf(x) \\ &= \left(P_n'(x) - 2xP_n\right)f(x) \\ &= P_{n+1}(x)f(x) \end{aligned}$$

Donc l'égalité est vraie au rang $n+1$.
Ainsi, par récurrence, l'égalité est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

(c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x :

$$f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x).$$

Initialisation ($n = 1$) :
Pour $n = 1$, l'égalité s'écrit $f^{(2)}(x) = 2xf^{(1)}(x) - 2f^{(0)}(x)$.
Ce qui s'écrit encore : $f''(x) = 2xf'(x) - 2f(x)$.
Or $f'(x) = -2xf(x)$ donc $f''(x) = -2f(x) + -2xf'(x)$.
Donc l'égalité est bien vraie pour $n = 1$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose l'égalité vraie au rang n. Montrons la au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+2)}(x) &= \left(f^{(n+1)}\right)'(x) \\
&= \left(-2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)\right)' \\
&= \left(-2x\left(f^{(n)}(x)\right)\right)' - 2n\left(f^{(n-1)}\right)'(x) \\
&= -2f^{(n)}(x) + (-2x)\left(f^{(n)}\right)'(x) - 2nf^{(n)}(x) \\
&= -2f^{(n)}(x) - 2xf^{(n+1)}(x) - 2nf^{(n)}(x) \\
&= -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)
\end{aligned}$$

Donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.
Ainsi, par récurrence, l'égalité est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

(d) En déduire, pour $n \geq 1$, une relation entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1}.
On a , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)$
Or on a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$.
Donc :

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x) &\iff P_{n+1}(x)f(x) = -2xP_n(x)f(x) - 2nP_{n-1}(x)f(x) \\
&\iff P_{n+1}(x)f(x) = (-2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x))f(x) \\
&\iff \boxed{P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)}
\end{aligned}$$

(e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.
On procède par une récurrence d'ordre 2 (puisqu'on a maintenant une relation de récurrence d'ordre 2 sur les polynômes P_n).
Initialisation ($n = 0$ et $n = 1$) :
$P_0(-X) = 1$ et $(-1)^0 P_0(X) = 1 \times 1 = 1$ donc l'égalité est vrai pour $n = 0$.
$P_1(-X) = -2(-X) = 2X$ et $(-1)^1 P_1(X) = -1 \times (-2X) = 2X$ donc l'égalité est vrai pour $n = 1$.
Hérédité : On suppose l'égalité vraie aux rangs n et $n + 1$. Montrons la au rang $n + 2$.
On écrit l'égalité démontrée à la question précédente au rang $n + 1$:

$$P_{n+2}(-X) = -2XP_{n+1}(X) - 2(n+1))P_n(X)$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
P_{n+2}(-X) &= -2(-X)P_{n+1}(-X) - 2(n+1)P_n(-X) \\
&= -2 \times (-1) \times X \times (-1)^{n+1}P_{n+1}(X) - 2(n+1)(-1)^n P_n(X) \\
&= -2X \times (-1)^{n+2}P_{n+1}(X) - 2(n+1)(-1)^n P_n(X) \\
&= -2X \times (-1)^{n+2}P_{n+1}(X) - 2(n+1)(-1)^{n+2} P_n(X) \quad \text{car } (-1)^n = (-1)^{n+2} \\
&= (-1)^{n+2}\left(-2XP_{n+1}(X) - 2(n+1)P_n(X)\right) \\
&= (-1)^{n+2}P_{n+2}(X)
\end{aligned}$$

Donc l'égalité est vraie au rang $n + 2$.
Ainsi, par récurrence, l'égalité est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

(f) En déduire la parité des polynômes P_n selon la valeur de n.
On en déduit que quand n est pair, P_n et pair et quand n est impair, P_n est impair.

Question subsidiaire

Déterminer tout les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $(P')^2 = 4P$.

On pourra commencer par étudier le degré de P.

On peut remarquer que le seul polynôme constant solution est le polynôme nul.

On considère maintenant un polynôme P non constant de degré n (donc $n \geq 1$) vérifiant l'égalité. On va étudier les propriétés de ce polynôme.
On a $\deg P' = n - 1$ donc $\deg\left((P')^2\right) = 2(n-1)$.
Or $\deg(4P) = n$.
n doit donc vérifier $2(n-1) = n$.
On en déduit que $n = 2$

Donc $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$
On remplace dans l'égalité qui s'écrit alors :
$(2aX + b)^2 = 4(aX^2 + bX + c)$.
$\iff 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c$
On en déduit que $a^2 = a$, or $a \neq 0$, donc $a = 1$
et $b^2 = 4c$ donc $c = \dfrac{b^4}{4}$.
Donc $P(X) = X^2 + bX + \dfrac{b^2}{4} = \left(X + \dfrac{b}{2}\right)^2$

Réciproquement, il est immédiat de vérifier qu'un tel polynôme est solution. Mais un polynôme de cette forme est aussi un polynôme de la forme $(X + \alpha)^2$

Conclusion :

$\boxed{\text{Les polynômes vérifiant l'égalité sont : le polynôme nul et tous les polynômes de la forme } (X+\alpha)^2.}$