TP 5 – Premiers programmes

Le but de ce TP est de mettre en œuvre tout ce que nous avons vu depuis le début de l'année dans des programmes un peu évolués, avant de passer à de nouvelles fonctionnalités de Scilab

Dans plusieurs de ces programmes, on aura besoin de l'instruction suivante, qui permet de tirer un nombre au hasard entre les entiers a et b, a et b inclus :

```
grand(1,1,"uin",a,b)
```

Par exemple, l'instruction ci-dessous simule un lancer d'un dé à 6 faces et mets le résultat dans une variable notée R

```
R=grand(1,1,"uin",1,6)
```

Programme 1 : le jeu du nombre mystère.

Créer un programme qui tire un nombre au hasard entre 1 et 100 et qui propose ensuite à l'utilisateur d'essayer de trouver ce nombre. Le programme doit afficher « trop bas », « trop haut » ou « gagné », selon la valeur entrée par l'utilisateur. Une fois que l'utilisateur a gagné, le programme doit afficher en combien d'essais l'utilisateur a trouvé le nombre mystère.

Programme 2 : la suite de Syracuse.

La suite de Syracuse est une suite définie de la façon suivante :

- u_0 est un nombre entier positif.
- Pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair.} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$

Par exemple si on choisit la valeur $u_0 = 7$ la suite est la suivante :

$$u_1 = 3 \times 7 + 1 = \mathbf{22}$$
$$u_2 = \frac{22}{2} = \mathbf{11}$$
$$u_3 = 11 \times 3 + 1 = \mathbf{34}$$
$$u_4 = \frac{34}{2} = \mathbf{17}$$
$$u_5 = 3 \times 17 + 1 = \mathbf{52}$$
$$u_6 = \frac{52}{2} = \mathbf{26}$$
$$u_7 = \frac{26}{2} = \mathbf{13}$$
$$u_8 = 13 \times 3 + 1 = \mathbf{40}$$
$$u_9 = \frac{40}{2} = \mathbf{20}$$
$$u_{10} = \frac{20}{2} = \mathbf{10}$$
$$u_{11} = \frac{10}{2} = \mathbf{5}$$
$$u_{12} = 5 \times 3 + 1 = \mathbf{16}$$
$$u_{13} = \frac{16}{2} = \mathbf{8}$$
$$u_{14} = \frac{8}{2} = \mathbf{4}$$
$$u_{15} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$
$$u_{16} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$
$$u_{17} = 3 \times 1 + 1 = \mathbf{4}$$
$$u_{18} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$
$$u_{19} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

Etc…

On constate que la suite finie par devenir périodique, répétant les valeurs $4 - 2 - 1 - 4 - 2 - 1 - \cdots$

Pour toutes les valeurs u_0 essayées jusqu'à aujourd'hui, on a toujours constaté que cette suite finie par revenir à 1 (puis à boucler avec les valeurs 4-2-1). Mais il n'existe toujours pas de preuve qu'elle le fera pour ***tous*** *les entiers u_0. C'est ce qu'on appelle la* ***conjecture de Syracuse*** *ou le « problème $3x + 1$ »*

On définit alors deux paramètres de la suite :

- La « durée de vol » : c'est le nombre d'étapes pour que la suite revienne à 1.
  Par exemple, avec $u_0 = 7$, la durée de vol est de 16.
- La « hauteur de vol » : c'est la valeur maximale atteinte par la suite.
- Par exemple, avec $u_0 = 7$, la hauteur de vol est de 52.

Programme Syracuse-1
Créer un programme qui définit la valeur de u_0 au départ et qui affiche toutes les valeurs de la suite jusqu'à ce que celle-ci revienne jusqu'à 1. Votre programme doit afficher à la fin la durée de vol et la hauteur de vol.

Programme Syracuse-2
Créer un programme qui fait varier u_0 de 1 à n et qui calcule pour chaque valeur de u_0 la durée de vol, puis qui affiche la valeur de u_0 pour laquelle la durée de vol est maximale. Si cette durée de vol est atteinte pour plusieurs valeurs de u_0, le programme doit afficher la plus petite valeur de u_0 qui atteint cette durée maximale.
En déduire la durée de vol maximale que l'on peut atteindre avec un u_0 inférieur ou égal à $10\,000$ et le plus petit u_0 pour lequel cette durée de vol est atteinte.

Programme Syracuse-3
Reprendre le principe de Syracuse-2 avec la hauteur de vol.

Programme 3 : le rang de la première boule rouge avec remise.

Une urne contient 2 boules rouges et $n - 2$ boules blanches. On tire successivement et *avec remise* des boules dans l'urne jusqu'à obtenir une boule rouge. On note alors X le nombre de boules tirées.

1. Ecrire un premier programme qui simule cette expérience en choisissant n au départ et qui affiche à la fin le nombre de boules tirées. Pour cela, on pourra simuler un tirage dans l'urne par un tirage d'un entier entre 1 et n et considérer que les boules rouge sont les nombres 1 et 2.

2. Ecrire un deuxième programme qui simule 10 000 répétitions de cette expérience et calcule le nombre moyen de boules tirées lors de ces 10 000 répétitions. **On prendra n pas trop grand (quelques dizaines au plus pour éviter des temps de calcul trop longs.)**. Vérifier alors que cette moyenne est proche de $\frac{n}{2}$.

Programme 4 : le rang de la première boule rouge sans remise.

Reprendre le programme précédent, mais sans remise. La moyenne du nombre de tirages doit s'approcher de $\frac{n+1}{3}$.

Programme 5 : l'urne changeante.

Une urne contient au départ 2 rouges et 1 blanche. On tire successivement n boules en remettant à chaque fois la boule tirée plus une boule de la même couleur. On note à la fin le nombre de boules rouges tirées lors de ces n tirages.
Ecrire un programme qui répète cette expérience 10000 fois (avec n de l'ordre de 10 ou 20) et qui affiche le nombre moyen de boules rouges tirées.
Vérifier que ce nombre moyen est proche de $\frac{2n}{3}$.