Feuille d'exercices n° 10 - Systèmes linéaires

Retrouvez les corrections de certains exercices en cliquant ici

Exercice 1. (★)
Résoudre les systèmes ci-dessous à l'aide du pivot de Gauss.

$$a)\left\{\begin{array}{lll} 2x-y & = & 0 \\ -x+y+z & = & 0 \\ -x+3y-2z & = & 0 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{lll} x-y+z & = & 1 \\ 2x+y-z & = & 2 \\ x-2y+3z & = & 0 \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{lll} 2x+3y+z & = & 4 \\ -x+y+2z & = & 3 \\ 7x+3y-5z & = & 2 \end{array}\right. \quad d)\left\{\begin{array}{lll} x+2y-z & = & 0 \\ 2x\quad -z & = & 0 \\ x-2y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$e)\left\{\begin{array}{lll} 2x-y+z & = & 3 \\ x+2z & = & -1 \\ x-y-z & = & 2 \end{array}\right. \quad f)\left\{\begin{array}{ll} 4x+2y-2z & =0 \\ 3x-y+z & =3 \\ x+y+z & =1 \\ x-y+z & =-2 \end{array}\right. \quad g)\left\{\begin{array}{ll} 3x-6y-6z & =0 \\ x-2y-3z & =0 \\ -2x+4y+6z & =0 \\ 6x-12y-12z & =0 \end{array}\right.$$

Exercice 2. (★)

Reprendre la question e de l'exercice ci-dessus avec $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme second membre.

Exercice 3. (★) *Pour s'entrainer - Corrections bientôt disponibles*
Résoudre les système ci-dessous :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{lll} x+y-z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \\ x+4y+z & = & 0 \end{array}\right. \quad (S_2)\left\{\begin{array}{lll} x+y+2z & = & 5 \\ x-y-z & = & 1 \\ x+z & = & 1 \end{array}\right. \quad (S_3)\left\{\begin{array}{lll} 2x-y+3z & = & 9 \\ 3x-5y+z & = & -4 \\ 4x-7y+z & = & 5 \end{array}\right.$$

Exercice 4. (★)

1. Déterminer tous les polynômes P de degré 2 tels que $P(1) = P'(1) = 1$ et $P(-1) = 3$.
2. Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$.

Exercice 5. (★) - (★) - (★★) - (★★)
Montrer que les matrices ci-dessous et sont inversibles et déterminer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. (★★)
Déterminer, selon la valeur de m, si la matrice M ci-dessous est inversible.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. (★★)
Discuter et résoudre, en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le système linéaire suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{lll} x+y+az & = & a \\ ax+y+z & = & 1 \\ ax+ay+z & = & a \end{array}\right.$$

Exercice 8. (★★★)
Justifier que les matrices ci-dessous sont inversibles et donner leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & & & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & & n-2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$