Chapitre 10

Systèmes linéaires

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions - Premiers exemples.

1.1 Définitions

Définition 1. (Système linéaire)
Soit p et n deux entiers non nuls. On appelle système linéaire de n équations à p inconnues un système de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$$

Les réels $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ sont appelés les **coefficients** du système, les $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment le **second membre** du système et $x_1,\ x_2, \ldots, x_p$ sont les **inconnues** du système.
Résoudre un tel système c'est trouver **tous** les p-uplets $(x_1,\ x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui vérifient **simultanément** les n équations.

Exemple 1.
Les trois systèmes ci-dessous sont linéaires.

$$\begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ -2x + y = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Exemple 2.
Les deux systèmes ci-dessous ne sont pas linéaires.

$$\begin{cases} x - y^2 = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

Définition 2. (Systèmes équivalents, système incompatible)

- Deux systèmes (S) et (S') sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.
- Un système (S) est dit **incompatible** s'il n'admet pas de solution.

Définition 3. (Systèmes homogènes, système homogène associé)

- Un système (S) est dit **homogène** si son second membre est nul.
- On appelle **système homogène associé** à un système (S) le système (H) obtenu en remplaçant tous les seconds membre b_i par 0.

1.2 Les différents cas possibles pour les systèmes linéaires

On a trois cas possibles pour un système linéaire à n équations et p inconnues :

- Si $n > p$, il y plus d'équation que d'inconnues. il y a alors deux cas possibles :
  - Soit le système ne possède aucune solution (il est dit incompatible).
  - Soit lorsqu'on résout le système on obtient des équations redondantes et alors, en les supprimant on est ramené au cas $n \leq p$.
- Si $n = p$, on dit qu'on a **un système carré d'ordre** n. Il y a alors trois cas possibles :
  - Soit le système possède une et une seule solution. **On dit alors qu'il s'agit d'un système de Cramer.**
  - Soit le système possède une infinité de solution
  - Soit le système ne possède aucune solution (il est dit incompatible).
- Si $n < p$, il y a deux possibilités :
  - Soit le système possède une infinité de solution
  - Soit le système ne possède aucune solution (il est dit incompatible).

1.3 Résolution dans des cas très simples

1.3.1 Résolution par substitution

Exemple 3.
Résolvons le système ci-dessous par substitution :

$$(S) : \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 7y = 1 \end{cases}$$

Remarque.
Cette méthode est souvent fastidieuse dès que le nombre d'équations ou d'inconnues est supérieur à 2.

1.3.2 Systèmes triangulaires (ou échelonnés)

Exemple 4.

$$(S) : \left\{ \begin{array}{cccc} x & +3y & +2z & = 2 \\ & 2y & +5z & = 4 \\ & & 4z & = 8 \end{array} \right.$$

Il est facile de résoudre ce système par **remontées successives**.

Exemple 5.

$$(S) : \begin{cases} -x & +2y & -z & = 0 \\ & y & -2z & = 5 \end{cases}$$

Dans ce système, le nombre d'inconnues est supérieure au nombre d'équations. On peut choisir dans la deuxième équation de laisser une inconnue "libre".
On est nous-même libre de choisir quelle inconnue sera libre.

2 Pivot de Gauss

2.1 Opérations Élémentaires

Définition 4. (Opérations élémentaires)
Soit (S) un système. On appelle opérations élémentaires l'une des opérations suivantes :

1. $L_i \leftrightarrow L_j$, $i \neq j$: **échange des lignes** i **et** j.
2. $L_i \leftarrow aL_i$, $a \neq 0$: **multiplication d'une ligne par un scalaire non nul**.
3. $L_i \leftarrow L_i + bL_j$, $i \neq j$: **addition d'un multiple de la ligne** j **à la ligne** i.
4. $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$, $a \neq 0$ et $i \neq j$ (Combinaison des deux opérations précédentes.)

Proposition 1. (Opérations élémentaires et systèmes équivalents) (admis)
Lorsqu'on applique l'une des opérations élémentaires à un système (S), on obtient un système équivalent à (S).

2.2 Pivot de Gauss

Cette méthode procède en deux temps :

- Élimination successive des inconnues à l'aide des opérations élémentaires pour passer du système initial à un système triangulaire équivalent.
- Remontée du système triangulaire obtenu.

Exemple 6.

$$(S_1) : \begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = 2 \\ 3x & + & y & + & 2z & = 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = 0 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 3x & - & y & + & 2z & = 1 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = 2 \\ x & + & 2y & + & z & = 0 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} & & y & - & z & = 1 \\ 2x & + & y & + & z & = 3 \\ x & & & + & z & = 1 \end{cases} \qquad (S_4) : \begin{cases} & y & -z & = 1 \\ 2x & +y & +z & = 1 \\ x & & +z & = 1 \end{cases}$$

Proposition 2. (Caractérisation d'un système de Cramer par le pivot de Gauss) (admis)
Un système carré (S) est un système de Cramer si on peut trouver un pivot non nul à chaque étape du pivot de Gauss.

3 Écriture matricielle d'un système linéaire.

Définition 5. (Écriture matricielle d'un système linéaire)
On considère le système :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p = y_n \end{cases}$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots y_n \end{pmatrix}$$

Le système (S) s'écrit alors :

$$AX = Y.$$

Cette écriture est appelée **écriture matricielle du système** (S).
Résoudre (S) revient donc à résoudre l'équation matricielle associée.

Proposition 3. (Systèmes de Cramer et matrices inversible) (admis)
Un système linéaire (S) est de Cramer si et seulement si sa matrice associée et inversible et dans ce cas l'unique solution du système $AX = Y$ est $X = A^{-1}Y$.

Exemple 7. Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible et calculons son inverse.