Programme de colle n° 10
Semaine du 7/12/2020 - Continuité et Systèmes linéaires

Question de cours

La colle commencera par une question de cours parmi celles-ci-dessous. Les questions marquées $(*)$ sont réservées à ceux ayant eu plus de 10 au dernier devoir.

- *Donner toutes les limites de taux d'accroissement du cours.*
- $(*)$ *Donner la définition de la limite finie d'une fonction en un point.*
- $(*)$ *Donner la définition de la limite infinie d'une fonction en un point.*
- $(*)$ *Donner la définition de la limite finie d'une fonction en l'infini.*
- $(*)$ *Donner la définition de la limite infinie d'une fonction en l'infini.*

Exercices préparés

L'exercice préparé de cette semaine consistera en l'un des exercices suivants :

- *Démontrer qu'une fonction définie par morceaux est continue. Par exemple, démontrer que la fonction f ci-dessous est continue sur $[0,+\infty[$ (c'est la fonction f_1 de l'exercice 11 de la FE09) :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  Vous pourrez avoir bien entendu une autre fonction que celle-ci.

- *Déterminer si une fonction est prolongeable par continuité en un point. Par exemple, déterminer si la fonction ci-dessous, définie sur $]0,1[$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1 (la réponse est oui en 0 et non en 1 car la limite vaut 1 en 0 et $+\infty$ en 1) :*

$$f : \begin{cases}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(x+1)}{x(1-x)} \end{cases}$$

- *Résoudre un système linéaire par pivot de Gauss.*

Vous devez avoir les compétences/connaissances suivantes.

Chapitre 9 - Limite et continuité

1. **Limites d'une fonction**
   Les notions marquées $(*)$ sont à savoir uniquement pour ceux ayant eu plus de 10 au dernier devoir.
   - $(*)$ Connaître la définition de la limite finie en un point x_0 (définition 1).
   - $(*)$ Connaître les définitions de la limite finie à gauche ou à droite en x_0 (définitions 2 et 3).
   - $(*)$ Connaître la définition de la limite infinie en un point x_0 (définition 4).
   - $(*)$ Connaître les définitions de la limite en l'infini (définition 5).
   - Connaître **parfaitement** les opérations sur les limites (propositions 2, 3 et 4).
   - **Connaître parfaitement les 4 formes indéterminées**
   - Connaître les propositions 5 et 6 (composée fonction fonction et suite fonction).
   - Savoir passer une inégalité à la limite (proposition 7)
   - Savoir utiliser les théorèmes de comparaison proposition 8)

- Connaître les trois versions du théorème d'encadrement.
- **Connaître parfaitement** les croissances comparées et savoir les appliquer.
- **Connaître parfaitement** les limites de taux d'accroissement (proposition 11).

2. **Continuité d'une fonction.**

- $(*)$ Connaître la définition de la continuité d'une fonction en un point.
- $(*)$ Connaître la définition de la continuité d'une fonction sur un intervalle.
- Savoir que toute les fonctions usuelles sont continues, sauf la fonction partie entière.
- Savoir qu'une somme, une différence, un produit, un quotient, une composée de fonction continues est continue.
- Savoir que les polynômes et les fonctions rationnelles sont continues.
- Connaître la proposition de passage à la limite dans une fonction continue (proposition 16) : Savoir que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ on n'a pas forcément $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$. Par contre si $f$est continue en a alors on a : $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

3. **Prolongement par continuité, continuité par morceaux.**

- Savoir déterminer si une fonction est prolongeable par continuité en un point.
- Savoir ce que signifie qu'une fonction est continue par morceaux, sans forcément retenir la définition exacte.

4. **Théorèmes de continuité**

- Connaître le théorème des valeurs intermédiaires.
- $(*)$ Savoir démontrer que si une fonction f est continue sur $[a, b]$ est que $f(a)f(b) \leq 0$ alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.
- Connaître le théorème des valeurs extrêmes sous cette forme :

  Une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

- Connaître le théorème de la bijection.

Chapitre 10 - Systèmes linéaires

- Savoir résoudre un système linéaire par pivot de Gauss.