Chapitre 11

Dérivation

Table des matières

1 Dérivabilité en un point

1.1 Définition

Définition 1. (Dérivabilité en un point)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point et soit $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable en x_0 lorsque le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, défini pour $x \neq x_0$ et appelé **taux d'accroissement de f entre x et x_0**, admet une limite finie quand x tend vers x_0.
Cette limite est alors appelée **nombre dérivé de f en x_0**, noté $f'(x_0)$.
Sous réserve d'existence, on a donc :

$$f'(x_0) =$$

ou, de manière équivalente :

$$f'(x_0) =$$

Exercice de cours 1.

- Prouver que la fonction racine carrée est dérivable en tout réel $x_0 > 0$ et retrouver la formule de sa dérivée.
- Prouver que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Remarque.

- Si f est dérivable en x_0, la courbe de f admet une tangente au point $M_0(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'(x_0)$. Cette tangente a alors pour équation :

  ....

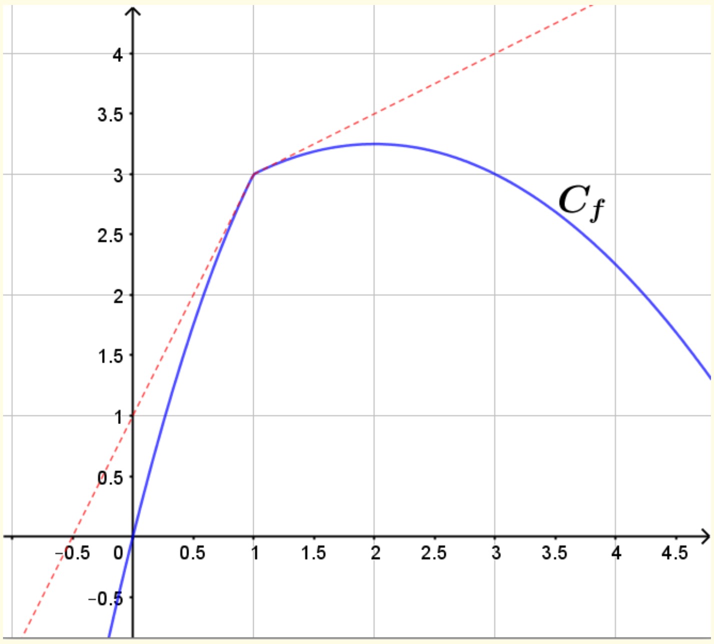
- Si la limite du taux d'accroissement en x_0 est $\pm\infty$, la courbe de f possède alors une tangente verticale au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

1.2 Dérivabilité à gauche et à droite

Définition 2. (Dérivabilité à gauche, à droite)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point et soit $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 lorsque le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 par la droite (resp. par la gauche).
Cette limite est alors appelée **nombre dérivé à droite (resp. à gauche) de f en x_0**, noté $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).

Remarque. Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0, la courbe de f admet une demi-tangente au point $M_0(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$). Cette demi-tangente a la même équation que dans le cas dérivable, en remplaçant $f'(x_0)$ par $f'_d(x_0)$ (resp. par $f'_g(x_0)$).

Exemple 1. Déterminer graphiquement $f'_g(1)$ et $f'_d(1)$:



Proposition 1. (Caractérisation de la dérivabilité par la dérivabilité à gauche et à droite)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point et soit x_0 un point intérieur à I.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } x_0 \\ \textbf{et} \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0). \end{cases}$$

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 2.
$f : x \mapsto |x|$ admet une dérivée à gauche et à droite en 0 : $f'_g(0) = \dots\dots\dots$ et $f'_d(0) = \dots\dots\dots$
Donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

1.3 Continuité et dérivabilité

Proposition 2. (Dérivable implique continue)

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Attention ! La réciproque est fausse. Par exemple, $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

2 Dérivabilité sur un intervalle

2.1 Définition et dérivabilité des fonctions de référence

Définition 3. (Dérivabilité sur un intervalle)
On dit que f est dérivable sur un intervalle I si f possède un nombre dérivé en tout point de I.

Exemple 3.
La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable sur ....

Proposition 3. (Dérivabilité des fonctions de référence)
Toutes les fonctions de référence sont dérivables sur leur domaine de définition sauf :

- La fonction racine carré, non dérivable en 0.
- La fonction valeur absolue, non dérivable en 0 (mais dérivable à gauche et à droite en 0).
- La fonction partie entière, non dérivable car non continue en tout x_0 entier.

2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

2.2.1 Opérations algébriques

Proposition 4. (Opérations algébriques sur les fonctions dérivables.)
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- Pour tout réel λ, λu est dérivable et : $(\lambda u)' =$ ....
- $u + v$ est dérivable et $(f + g)' =$ ....
- uv est dérivable et $(fg)' =$ ....
- si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{v}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{v}\right)' =$
- si v ne s'annule pas sur I alors alors $\frac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\frac{u}{v}\right)' =$

Exemple 4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.2.2 Dérivée d'une composée

Proposition 5. (Dérivée d'une composée)
Soit u dérivable sur I et f dérivable sur $f(I)$. La fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et on a :

$$\big(f(u)\big)' = \dots\dots\dots\dots$$

En particulier, on a :

- $(e^u)' = \dots\dots\dots\dots.$
- $(\ln u)' = \dots\dots\dots\dots.$
- $(\sqrt{u})' = \dots\dots\dots\dots.$
- $(\cos u)' = \dots\dots\dots\dots.$
- $(\sin u)' = \dots\dots\dots\dots.$
- $(\tan u)' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2.2.3 Dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable

Proposition 6. (Dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable)
Soit f une fonction continue et strictement monotone (donc bijective) de I sur $J = f(I)$.

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ \text{et} \\ f' \text{ ne s'annulle pas sur } I \end{cases} \quad \textbf{alors} \begin{cases} f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \\ \text{et} \\ \forall x \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \end{cases}$$

Proposition 7. (Dérivée de la fonction arctan)
La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) =$$

3 Théorème de Rolle et accroissements finis

3.1 Théorème de Rolle

Proposition 8. (Lemme 1 : fonction dérivable ayant un maximum en un point intérieur)
Soit $a, b \in I$, $a < b$,

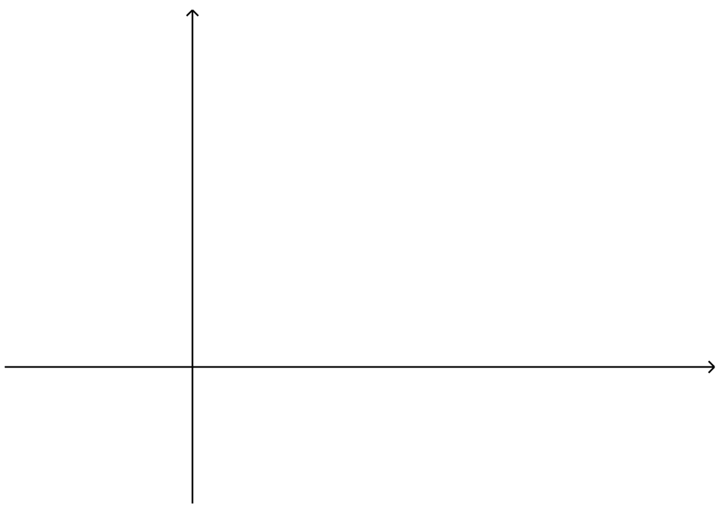
Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f \text{ atteint un maximum } M \text{ en un réel } \alpha \in]a,b[\end{cases}$ **alors** $f'(\alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Proposition 9. (Lemme 2 : fonction dérivable ayant un minimum en un point intérieur)
Soit $a, b \in I$, $a < b$,

Si $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f \text{ atteint un minimum } m \text{ en un réel } \alpha \in]a,b[\end{cases}$ **alors** $f'(\alpha) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Proposition 10. (Théorème de Rolle)
Soit $a, b \in I$, $a < b$,

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$ **alors** ....



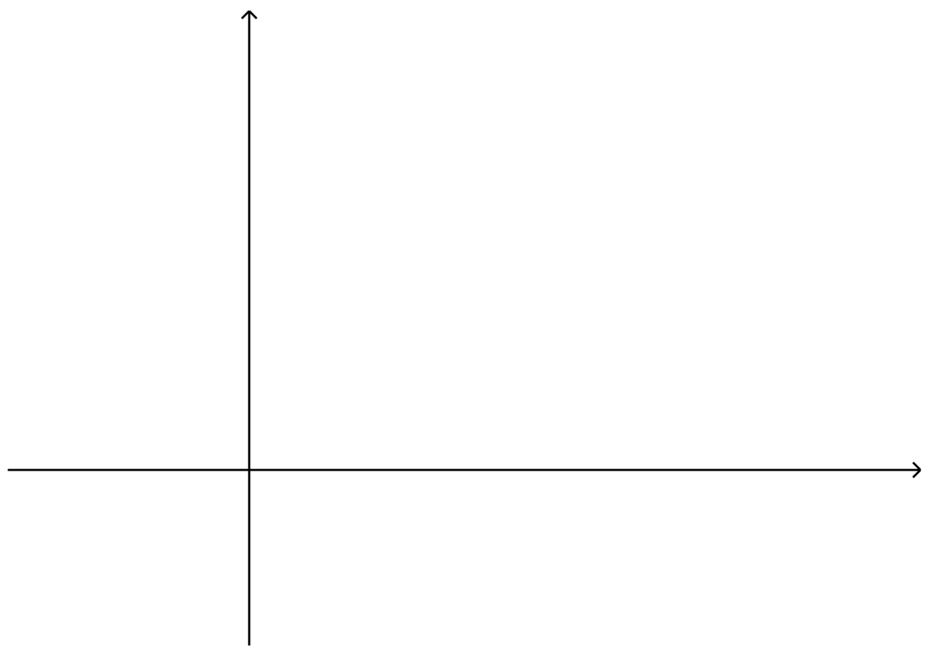
Exercice de cours 2.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $C_0,\ C_1, \ldots, C_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{k+1} = 0$.

Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k x^k = 0$.

3.2 Théorème et Inégalité des accroissements finis

Proposition 11. (Théorème des Accroissements finis)
Soit $a, b \in I,\ a < b$,

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\end{cases} \quad \textbf{alors} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



Proposition 12. (Inégalité des Accroissements finis - version 1)
Soit $a, b \in I,\ a < b$,

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ \text{il existe deux réels } m,\ M \text{ tq } \forall x \in]a, b[,\ m \leq f'(x) \leq M \end{cases} \quad \textbf{alors} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Proposition 13. (Inégalité des Accroissements finis - version 2)
Soit $a, b \in I,\ a < b$,

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ \text{il existe un réel } M \text{ tq } \forall x \in]a, b[,\ |f'(x)| \leq M \end{cases} \quad \textbf{alors} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice de cours 3. Équivalent de la série harmonique et constante d'Euler
On définit la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Cette suite s'appelle "la série harmonique".

1. Démontrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$
2. En déduire que pour tout entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.
3. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{H_n}{\ln n}$.
5. On pose $u_n = H_n - \ln n$.
   Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. En déduire qu'elle converge.
   Sa limite est appelée la constante d'Euler et se note γ.
6. On pose $v_n = \ln(n+1) - H_n$.
   Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire que (v_n) converge vers γ.
7. Proposer alors un programme Scilab qui demande la précision souhaitée affiche une valeur approchée de γ avec la précision demandée. On calculera pour cela les suites u_n et v_n jusqu'à ce que $u_n - v_n$ soit inférieur à la précision demandée.

Exercice de cours 4.
Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$

3.3 Monotonie et signe de la dérivée

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer un théorème que nous avons pourtant déjà beaucoup utilisé :

Proposition 14. (Monotonie et signe de la dérivée)
Soient I un intervalle (pas forcément fermé) d'extrémités a et b avec $a < b$, et f une fonction continue sur I et dérivable sur $]a, b[$.

1. f est constante sur I si et seulement si ....
2. f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si ....
3. f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si

   ....

Attention ! Ces résultats sont uniquement valables sur un intervalle ! Une fonction peut-être de dérivée nulle sans être constante pour autant, comme le montre l'exemple suivant :

Exercice de cours 5. Prouver que pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0. \end{cases}$$