DM n° 5 - Continuité et Dérivabilité

Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}.$$

Le but de ce DM est d'étudier la continuité et la dérivabilité de f_n pour quelques valeurs de n.
On pourra aller visualiser la fonction f_n sur Geogebra en cliquant ici.

1. **Étude de f_0 au voisinage de 0.**
   Le but de cette question est de prouver que $f_0(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$.
   On raisonne par l'absurde en supposant que cette limite existe.
   On note cette limite ℓ (ℓ peut donc être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).
   On définit alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{2n\pi} \text{ et } v_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$
   (a) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_0(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_0(v_n) = \ell$.
   (b) Démontrer que par ailleurs $\big(f_0(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(f_0(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des suites constantes et donner leur valeur respective.
   (c) En déduire une contradiction.

2. **Étude de $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0.**
   En utilisant de même les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, prouver que $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

3. **Étude de f_1.**
   (a) Donner l'expression de $f_1(x)$ pour $x \neq 0$.
   (b) Démontrer que f_1 est continue en 0.
   (c) Démontrer que f_1 n'est pas dérivable en 0.

4. **Étude de f_2.**
   (a) Donner l'expression de $f_2(x)$ pour $x \neq 0$.
   (b) Démontrer que f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de $f_2'(0)$.
   (c) Donner l'expression de $f_2'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire que $f_2'(x)$ n'a pas de limite en 0.

   f_2 est donc un exemple de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.