Feuille d'exercices n° 11 - Dérivation

Exercice 1. (★★)
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction g est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2. (★★)
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln x & \text{si } x > 0, \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $[0, +\infty[$.
2. Dresser le tableau de variations de φ.

Exercice 3. (★★)
Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$\forall x \in]0,1[, \ f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln x}.$$

1. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée. Préciser $f(0)$.
2. Justifier que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
3. Justifier que f est dérivable sur $]0, 1[$ et calculer sa dérivée. On donnera cette dernière sous la forme d'un quotient avec $x(1+x)(\ln x)^2$ au dénominateur.
4. Donner le tableau de signe de $t \ln t$ pour $t \in]0, +\infty[$. En déduire le tableau de variations de f.
5. En déduire que f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle que l'on précisera. Et donner le sens de variation de f^{-1}.

Exercice 4. (★★) (*Voir l'indication ici*)
Démontrer que pour tout réel $x \in [0,1]$, $x \leq e^x - 1 \leq xe^x$

Exercice 5. (★★) (*Voir l'indication ici*)
Démontrer que pour tout réel $x \in]-1, +\infty[$, $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x$

Exercice 6. (★★) (*Voir l'indication ici*)
Démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$

Exercice 7. (★★)
Soit f la fonction définie sur $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$ par $f(x)=\frac{e^x}{x+2}$.

1. (a) Donner le tableau de variation de f et préciser $f([0,1])$.
   (b) Montrer que : $\forall x\in[0,1],\ \frac{1}{4}\leq f'(x)\leq\frac{2}{3}$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution dans $[0,1]$. *On notera a cette unique solution dans la suite du problème.*

   On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$.
2. (a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[0,1]$.
   (b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_{n+1}-a|\leq\frac{2}{3}|u_n-a|$.
   (c) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-a|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   (d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.

Exercice 8. (★★)
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x\geq 0,\ |g'(x)|\leq\frac{1}{2}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$. Justifier ensuite que $\alpha\in]0,1[$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=g(u_n)$.
   (a) Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 0$ et $|u_n-\alpha|\leq\frac{\alpha}{2^n}$.
   (b) En déduire la limite de (u_n).
   (c) En utiliser le fait que $\frac{\alpha}{2^n}\leq\frac{1}{2^n}$, écrire un programme Scilab qui demande un réel strictement positif E à l'utilisateur et renvoie une valeur approchée a de α telle que $|a-\alpha|<E$.

Exercice 9. (★★★)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et P un polynôme non nul ayant n racines distinctes.
Montrer que P' admet au moins $n-1$ racines distinctes.

Exercice 10.
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x+\ln x$.

- (★) Justifier que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle que vous préciserez.
- (☆) On note g la réciproque de f. Déterminer le sens de variation de g et montrer que g est dérivable. En déduire le signe de g'.
- (★★★) Exprimer g' en fonction de g.

Exercice 4 - Indication. (*retour à l'exercice 4*)
Vérifier que l'égalité est vraie pour $x=0$. Puis pour $x>0$, appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction Exponentielle sur l'intervalle $[0,x]$.

Exercice 5 - Indication. (*retour à l'exercice 5*)
Appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ sur l'intervalle $[0,x]$ ou $[x,0]$ selon le signe de x.

Exercice 6 - Indication. (*retour à l'exercice 6*)
Appliquer l'inégalité des accroissements finis (version 2) à la fonction sin sur l'intervalle $[0,x]$ ou $[x,0]$ selon le signe de x.