Programme de colle n° 11
Semaine du 14/12/2020
Continuité - Systèmes linéaires et Dérivation

Question de cours

La colle commencera par une question de cours parmi celles-ci-dessous. Les questions marquées $(*)$ sont réservées à ceux ayant eu plus de 10 au dernier devoir.

1. Donner la définition du fait qu'une fonction f est dérivable un point x_0. Donner les deux expressions équivalentes de la dérivée en x_0.
   Réponse attendue :
   Une fonction f est dérivable en x_0 si elle est définie en x_0 et si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers une limite finie lorsque $x \to x_0$.
   On note alors :
   $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
   On a aussi :
   $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2. Donner la définition de la dérivée à gauche et à droite d'une fonction en un point x_0.
   Réponse attendue :
   $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, si cette limite existe et est finie.
   $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, si cette limite existe et est finie.

3. Donner la caractérisation de la dérivabilité par les dérivées à gauche et à droite.
   Réponse attendue :
   Si f est définie sur un intervalle $]a,b[$ et que $x_0 \in]a,b[$ (c'est-à-dire si f est définie à gauche et à droite de x_0. f est dérivable en x_0 si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que ces dérivées sont égales.

4. Quel lien peut-on faire entre dérivabilité et continuité ?
   Réponse attendue :
   Si f est dérivable en x_0 alors elle et continue en x_0. La réciproque et fausse.

5. Donner un exemple de fonction qui et continue mais non dérivable en un point.
   Réponse attendue :
   On peut proposer la fonction valeur absolue qui est continue mais pas dérivable en 0, mais il faut savoir expliquer pourquoi elle n'est pas dérivable en 0.

6. Donner la formule de la dérivée d'une composée et tous les cas particuliers.
   Réponse attendue : Il faut donner toutes les formules de la proposition 5 du Chapitre 11

7. Quand est-ce que la réciproque d'une bijection $f : I \to J$ est dérivable ?
   Et quelle alors est la dérivée de f^{-1}.
   Réponse attendue : f^{-1} est dérivable si f est dérivable que f' ne s'annule pas sur I.
   Dans ce cas, on a :
   $$\forall x \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

8. Rappeler le domaine de définition,la parité, les limites et la valeur en 0 et en 1 de $Artctan$ et donner sa dérivée.
   Réponse attendue : $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \to +\infty} \arctan x \frac{\pi}{2}$.
$\arctan$ est impaire (donc, $\arctan(-x) = -\arctan x$).
$\arctan 0 = 0$ et $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.
$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$.

9. Citer le théorème de Rolle.
   Réponse attendue : Si f est une fonction :

$$\textbf{Si} \quad \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \quad \textbf{alors} \quad \exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$$

   Attention au sens des crochets ! Une seule erreur de crochet et tout le théorème est considéré comme mal su ! !

Exercices préparés

Pour ceux n'ayant pas eu la moyenne au dernier DS : *L'exercice préparé de cette semaine consistera en l'un des exercices suivants :*

1. Résoudre un système linéaire par pivot de Gauss. Il est important de ne pas être trop lent et de ne pas faire d'erreurs ! Il faut donc vous entrainer ! Vous pouvez pour cela aller voir le générateur de systèmes linéaires dont le lien et donné ici

2. Inverser une matrice par pivot de Gauss.

3. Démontrer qu'une fonction définie par morceaux est dérivable. Voir l'exemple 4 du cours ou les exercices 1 et 2 de la FE11.

4. Démontrer que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée. Puis démontrer qu'elle n'est pas dérivable en 0 : c'est l'exercice 1 du Chapitre 11.

Pour ceux ayant eu la moyenne au dernier DS : *L'exercice préparé de cette semaine consistera en l'une des démonstration suivantes :*

1. Démontrer que si u et v sont dérivables en x_0, alors uv l'est aussi et retrouver la formule de la dérivée de uv.

2. Démontrer que la fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée (c'est la preuve de la proposition 7 du Chapitre 11).

3. Démontrer que si une fonction f est dérivable sur $]a,b[$ et admet un extremum sur $]a,b[$ alors sa dérivée au point où elle atteint cet extremum. En déduire le théorème de Rolle.
   Ce sont les propositions 8, 9 et 10 du Chapitre 11. Il faut donc les démontrer l'une après l'autre.

Vous devez avoir les compétences/connaissances suivantes.

Chapitre 9 - Limite et continuité

1. **Limites d'une fonction**
   - Connaître les propositions 5 et 6 (composée fonction fonction et suite fonction).
   - Savoir passer une inégalité à la limite (proposition 7)
   - Savoir utiliser les théorèmes de comparaison proposition 8)
   - Connaître les trois versions du théorème d'encadrement.
   - **Connaître parfaitement** les croissances comparées et savoir les appliquer.
   - **Connaître parfaitement** les limites de taux d'accroissement (proposition 11).
2. **Continuité d'une fonction.**

- $(*)$ Connaître la définition de la continuité d'une fonction en un point.
- $(*)$ Connaître la définition de la continuité d'une fonction sur un intervalle.
- Savoir que toute les fonctions usuelles sont continues, sauf la fonction partie entière.
- Savoir qu'une somme, une différence, un produit, un quotient, une composée de fonction continues est continue.
- Savoir que les polynômes et les fonctions rationnelles sont continues.
- Connaître la proposition de passage à la limite dans une fonction continue (proposition 16) : Savoir que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ on n'a pas forcément $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$. Par contre si $f$est continue en a alors on a : $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

3. **Prolongement par continuité, continuité par morceaux.**
   - Savoir déterminer si une fonction est prolongeable par continuité en un point.
   - Savoir ce que signifie qu'une fonction est continue par morceaux, sans forcément retenir la définition exacte.

4. **Théorèmes de continuité**
   - Connaître le théorème des valeurs intermédiaires.
   - $(*)$ Savoir démontrer que si une fonction f est continue sur $[a, b]$ est que $f(a)f(b) \leq 0$ alors f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.
   - Connaître le théorème des valeurs extrêmes sous cette forme :

     Une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.
   - Connaître le théorème de la bijection.

Chapitre 10 - Systèmes linéaires

- Savoir résoudre un système linéaire par pivot de Gauss. Eventuellement avec un ou des paramètres.
- Savoir déterminer si une matrice est inversible par pivot de Gauss.
- Savoir inverser une matrice par pivot de Gauss

Chapitre 11 - Dérivabilité

Toutes les connaissances à avoir sont listées dans le questions de cours. Vous devez avoir les compétences suivantes :

- Savoir déterminer si une fonction est dérivable en un point et vérifier qu'elle l'est sur un intervalle. Voir l'exemple 4 du cours ou les exercices 1 et 2 de la FE11.
- $(*)$ Savoir appliquer le théorème de Rolle. Voir l'exercice de cours 2.