Questions de Cours

1. Donner la définition du fait qu'une fonction f est dérivable un point x_0. Donner les deux expressions équivalentes de la dérivée en x_0.
2. Donner la définition de la dérivée à gauche et à droite d'une fonction en un point x_0.
3. Donner la caractérisation de la dérivabilité par les dérivées à gauche et à droite.
4. Quel lien peut-on faire entre dérivabilité et continuité ?
5. Donner un exemple de fonction qui et continue mais non dérivable en un point.
6. Donner la formule de la dérivée d'une composée et tous les cas particuliers.
7. Quand est-ce que la réciproque d'une bijection $f : I \to J$ est dérivable ?
Et quelle alors est la dérivée de f^{-1}.
8. Rappeler le domaine de définition,la parité, les limites et la valeur en 0 et en 1 de $Artctan$ et donner sa dérivée.
9. Citer le théorème de Rolle.

Exercices préparés

Exercice 1.
Résoudre le système ci-dessous :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rrrl} 4x & +4y & +3z & = -3 \\ -x & +5y & -4z & = -21 \\ -4x & -y & +3z & = 15 \end{array}\right.$$

Exercice 2.
Résoudre le système ci-dessous :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rrrl} -x & -y & +2z & = 1 \\ 4x & -4y & -2z & = 34 \\ -2x & -4y & +3z & = 9 \end{array}\right.$$

Exercice 3.
Résoudre le système ci-dessous :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcl} x - 2y - 4z & = & -2 \\ 2x + y - 2z & = & 4 \\ -x - 4y - 4z & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 4.
Résoudre le système ci-dessous :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcl} x - 4y + 3z & = & -3 \\ -3x - 4y + z & = & -3 \\ -x - 4y - z & = & 4 \end{array}\right.$$

Exercice 5.
Résoudre le système ci-dessous :

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & & & = & -2 \\ -5x & & & - & 4z & & & = & 28 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & + & 2t & = & -18 \\ -2x & & & & & + & 5t & = & 18 \end{array}\right.$$

Exercice 6.
Démontrer que la matrice ci-dessous est inversible et déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.
Étudier l'inversibilité de la matrice ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 9.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan^2 x}{x} \ln x \text{ si } \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa dérivée pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 10.
Démontrer que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée. Puis démontrer qu'elle n'est pas dérivable en 0

Exercice 11.
Démontrer que si u et v sont dérivables en x_0, alors uv l'est aussi et retrouver la formule de la dérivée de uv.

Exercice 12.
Démontrer que la fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée

Exercice 13.
Démontrer que si une fonction f est dérivable sur $]a, b[$ et admet un extremum sur $]a, b[$ alors sa dérivée s'annule au point où elle atteint cet extremum. En déduire le théorème de Rolle.

Exercices non préparés

Exercice 14.
Pour quelles valeurs du paramètre t la matrice suivante est-elle inversible ? Dans ce cas, déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15.
Pour quelles valeurs du paramètre réel a la matrice suivante est-elle inversible ? Dans ce cas, déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

.

- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que vous déterminerez.
- Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ selon les valeurs de x.
-

est strictement croissante puis que pour tout $y \in \ ]-1, 1[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 17.
Montrer que l'application définie dans l'exercice précédent est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18.
Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x},$$

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}}, \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x^2+x-6},$$

Exercice 19.
Soient a, b, et c trois nombres réels.

1. Quelle relation doivent satisfaire les paramètres a, b et c pour que le système suivant ait au moins une solution ?

$$\mathcal{S}_{abc} : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{array}\right.$$

2. Est-ce que le système $\mathcal{S}_{abc}$ peut avoir une unique solution ?

Exercice 20.
Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$\mathcal{S}_1 : \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ mx & + & (m+4)y & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\mathcal{S}_2 : \left\{\begin{array}{ccccc} mx & + & (m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x & - & my & = & 5m+3 \end{array}\right.$$

Exercice 21.
Résoudre suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ a^2x+y+az=0 \\ ax+a^2y+z=0 \end{cases}$.

Exercice 22.
Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

Exercice 23.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 24.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f n'est pas continue en $\frac{1}{n}$.

Exercice 25.
On définit l'application :

$$f \left\{ \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow &]-1,+\infty[\\ x & \longmapsto & x\ln x - x \end{array} \right. .$$

1. Montrer que $f$est une bijection.
2. On pose $g = f^{-1}$.
   (a) Montrer que g est dérivable.
   (b) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.

Exercice 26. Fonction Arcsin

1. Montrer que la fonction $\sin$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$. On notera $\arcsin$ la bijection réciproque.
2. Déterminer $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
3. Montrer que $\arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer sa dérivée.
4. En déduire la valeur de :
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

Exercice 27. Fonction Arccos

1. Montrer que la fonction $\cos$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. On notera $\arccos$ la bijection réciproque.
2. Déterminer $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
3. Montrer que $\arccos$ est dérivable sur $]0,\pi[$ et déterminer sa dérivée.
4. En déduire la valeur de :
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

Exercice 28.
Soit g une fonction 2 fois dérivable sur $[a,b]$ telle que : $g(a) = g(b) = 0$ et $\forall x \in]a,b[, g''(x) \leq 0$.
Montrer que g est positive sur $]a,b[$.

Exercice 29.
Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ (a et b réels) admet au plus 3 racines réelles.

Exercice 30.
Montrer que le polynôme P_n défini par :

$$P_n(X) = \left((1-t^2)^n\right)^{(n)}$$

est un polynôme de degré n dont les racines réelles sont simples et appartiennent à $[-1,1]$.