Questions de Cours

1. Donner la définition du fait qu'une fonction f est dérivable un point x_0. Donner les deux expressions équivalentes de la dérivée en x_0.
   Réponse attendue :
   Une fonction f est dérivable en x_0 si elle est définie en x_0 et si le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tend vers une limite finie lorsque $x \to x_0$.
   On note alors :
   $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
   On a aussi :
   $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

2. Donner la définition de la dérivée à gauche et à droite d'une fonction en un point x_0.
   Réponse attendue :
   $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, si cette limite existe et est finie.
   $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, si cette limite existe et est finie.

3. Donner la caractérisation de la dérivabilité par les dérivées à gauche et à droite.
   Réponse attendue :
   Si f est définie sur un intervalle $]a,b[$ et que $x_0 \in]a,b[$ (c'est-à-dire si f est définie à gauche et à droite de x_0. f est dérivable en x_0 si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que ces dérivées sont égales.

4. Quel lien peut-on faire entre dérivabilité et continuité ?
   Réponse attendue : Si f est dérivable en x_0 alors elle et continue en x_0. La réciproque et fausse.

5. Donner un exemple de fonction qui et continue mais non dérivable en un point.
   Réponse attendue : On peut proposer la fonction valeur absolue qui est continue mais pas dérivable en 0, mais il faut savoir expliquer pourquoi elle n'est pas dérivable en 0.

6. Donner la formule de la dérivée d'une composée et tous les cas particuliers.
   Réponse attendue : Il faut donner toutes les formules de la proposition 5 du Chapitre 11

7. Quand est-ce que la réciproque d'une bijection $f : I \to J$ est dérivable ?
   Et quelle alors est la dérivée de f^{-1}.
   Réponse attendue : f^{-1} est dérivable si f est dérivable que f' ne s'annule pas sur I.
   Dans ce cas, on a :
   $$\forall x \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

8. Rappeler le domaine de définition,la parité, les limites et la valeur en 0 et en 1 de $Artctan$ et donner sa dérivée.
   Réponse attendue : arctan est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x \dfrac{\pi}{2}$.
   arctan est impaire (donc, $\arctan(-x) = -\arctan x$).
   $\arctan 0 = 0$ et $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.
   $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

9. Citer le théorème de Rolle.
   Réponse attendue : Si f est une fonction :
   $$\textbf{Si} \quad \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \quad \textbf{alors} \quad \exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$$

Attention au sens des crochets ! Une seule erreur de crochet et tout le théorème est considéré comme mal su ! !

Exercices préparés

Exercice 1.
Résoudre le système ci-dessous :

$$(S) : \begin{cases} 4x & +4y & +3z & = -3 \\ -x & +5y & -4z & = -21 \\ -4x & -y & +3z & = 15 \end{cases}$$

Réponse attendue : $\mathscr{S} = \{(-1, -2, 3)\}$

Exercice 2.
Résoudre le système ci-dessous :

$$(S) : \begin{cases} -x & -y & +2z & = 1 \\ 4x & -4y & -2z & = 34 \\ -2x & -4y & +3z & = 9 \end{cases}$$

Réponse attendue : $\mathscr{S} = \{(5, -4, 1)\}$

Exercice 3.
Résoudre le système ci-dessous :

$$(S) : \begin{cases} x - 2y - 4z & = & -2 \\ 2x + y - 2z & = & 4 \\ -x - 4y - 4z & = & -1 \end{cases}$$

Réponse attendue : $\mathscr{S} = \left\{ \left(-12, \frac{23}{2}, -\frac{33}{4} \right) \right\}$

Exercice 4.
Résoudre le système ci-dessous :

$$(S) : \begin{cases} x - 4y + 3z & = & -3 \\ -3x - 4y + z & = & -3 \\ -x - 4y - z & = & 4 \end{cases}$$

Réponse attendue : $\mathscr{S} = \left\{ \left(\frac{7}{6}, -\frac{17}{24}, -\frac{7}{3} \right) \right\}$

Exercice 5.
Résoudre le système ci-dessous :

$$(S) : \begin{cases} x & + & 2y & - & 2z & & & = & -2 \\ -5x & & & - & 4z & & & = & 28 \\ 2x & + & 4y & + & 5z & + & 2t & = & -18 \\ -2x & & & & & + & 5t & = & 18 \end{cases}$$

Réponse attendue : $\mathscr{S} = \{(-4, -1, -2, 2)\}$

Exercice 6.

Démontrer que la matrice ci-dessous est inversible et déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Réponse attendue : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 7.
Étudier l'inversibilité de la matrice ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Réponse attendue : A n'est pas inversible.

Exercice 8.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer sa dérivée pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 9.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan^2 x}{x} \ln x \text{ si } \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa dérivée pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 10.
Démontrer que la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée. Puis démontrer qu'elle n'est pas dérivable en 0

Exercice 11.
Démontrer que si u et v sont dérivables en x_0, alors uv l'est aussi et retrouver la formule de la dérivée de uv.

Exercice 12.
Démontrer que la fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée

Exercice 13.
Démontrer que si une fonction f est dérivable sur $]a, b[$ et admet un extremum sur $]a, b[$ alors sa dérivée s'annule au point où elle atteint cet extremum. En déduire le théorème de Rolle.

Exercices non préparés

Exercice 14.
Pour quelles valeurs du paramètre t la matrice suivante est-elle inversible ? Dans ce cas, déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15.
Pour quelles valeurs du paramètre réel a la matrice suivante est-elle inversible ? Dans ce cas, déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16.
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

.

- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que vous déterminerez.
- Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ selon les valeurs de x.
-

est strictement croissante puis que pour tout $y \in \ ]-1,1[$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 17.
Montrer que l'application définie dans l'exercice précédent est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18.
Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^{n+1}-\alpha^{n+1}}{x^n-\alpha^n},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x},$$

$$\lim_{x\to\alpha^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}, \quad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor,$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x^2+x-6},$$

Réponse attendue : **Indications :**

1. Calculer d'abord la limite de $f(x) = \dfrac{x^k - \alpha^k}{x - \alpha}$.
2. Utiliser $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et faire un changement de variable $u = \cos x$.
3. Utiliser l'expression conjuguée.
4. Diviser numérateur et dénominateur par $\sqrt{x-\alpha}$ puis utiliser l'expression conjuguée.
5. On a toujours $y - 1 \leq E(y) \leq y$, poser $y = 1/x$.
6. Diviser numérateur et dénominateur par $x - 2$.

Correction :

1. Montrons d'abord que la limite de
$$f(x) = \frac{x^k - \alpha^k}{x - \alpha}$$
en α est $k\alpha^{k-1}$, k étant un entier fixé. Un calcul montre que $f(x) = x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \cdots + \alpha^{k-1}$; en effet $(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \cdots + \alpha^{k-1})(x - \alpha) = x^k - \alpha^k$. Donc la limite en $x = \alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est la taux d'accroissement de la fonction x^k, et donc la limite de f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α, soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme
$$\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n} = \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha} \times \frac{x - \alpha}{x^n - \alpha^n}.$$
Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est
$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\alpha.$$

2. La fonction $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)}$ s'écrit aussi $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\cos x(\cos 2x - \cos x)}$. Or $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Posons $u = \cos x$, alors
$$f(x) = \frac{1-u}{u(2u^2 - u - 1)} = \frac{1-u}{u(1-u)(-1-2u)} = \frac{1}{u(-1-2u)}$$
Lorsque x tend vers 0, $u = \cos x$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{3}$.

3.
$$\begin{aligned}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1}\end{aligned}$$
Quand $x \to +\infty$ alors $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ et $\dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x} = \sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}} \to 0$, donc la limite recherchée est $\dfrac{1}{2}$.

4. La fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}-\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x+\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}-1}{\sqrt{x+\alpha}}.$$

Notons $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée

$$g(x) = \frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-\alpha})(\sqrt{x}+\sqrt{\alpha})} = \frac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}.$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x \to \alpha^+$. Et maintenant $f(x) = \dfrac{g(x)-1}{\sqrt{x+\alpha}}$ tend vers $-\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

5. Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y-1 < E(y) \leq y$. Donc pour $y > 0$, $\dfrac{y-1}{y} < \dfrac{E(y)}{y} \leq 1$. On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ alors $\dfrac{E(y)}{y}$ tend 1. On obtient le même résultat quand y tend vers $-\infty$. En posant $y = 1/x$, et en faisant tendre x vers 0, alors $xE(\frac{1}{x}) = \dfrac{E(y)}{y}$ tend vers 1.

6. $$\frac{e^x-e^2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{x^2+x-6} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \frac{e^x-e^2}{x-2} \times \frac{1}{x+3}.$$

La limite de $\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ en 2 vaut e^2 ($\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$ est la taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto e^x$ en la valeur $x=2$), la limite voulue est $\dfrac{e^2}{5}$.

Exercice 19.
Soient a, b, et c trois nombres réels.

1. Quelle relation doivent satisfaire les paramètres a, b et c pour que le système suivant ait au moins une solution ?

$$\mathcal{S}_{abc} \ : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & a \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & b \\ x & - & 2y & + & 7z & = & c \end{array} \right.$$

2. Est-ce que le système $\mathcal{S}_{abc}$ peut avoir une unique solution ?

Exercice 20.
Résoudre, suivant les valeurs de m :

$$\mathcal{S}_1 \ : \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & (m+1)y & = & m+2 \\ mx & + & (m+4)y & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\mathcal{S}_2 \ : \left\{ \begin{array}{rcrcl} mx & + & (m-1)y & = & m+2 \\ (m+1)x & - & my & = & 5m+3 \end{array} \right.$$

Réponse attendue : (S_1) : solution unique si $m^2 \neq 4$, impossible sinon.
(S_2) : solution unique si $m^2 \neq 1/2$, infinité sinon.

Exercice 21.

Résoudre suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ a^2 x + y + az = 0 \\ ax + a^2 y + z = 0 \end{cases}$.

Exercice 22.
Pour quelles valeurs de a la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.

Exercice 23.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 24.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f n'est pas continue en $\frac{1}{n}$.

Exercice 25.
On définit l'application :

$$f \left\{ \begin{array}{rcl}]1, +\infty[& \longrightarrow &]-1, +\infty[\\ x & \longmapsto & x \ln x - x \end{array} \right. .$$

1. Montrer que $f$est une bijection.
2. On pose $g = f^{-1}$.
   (a) Montrer que g est dérivable.
   (b) Déterminer $g(0)$ et $g'(0)$.

Exercice 26. Fonction Arcsin

1. Montrer que la fonction $\sin$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. On notera $\arcsin$ la bijection réciproque.
2. Déterminer $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
3. Montrer que $\arcsin$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et déterminer sa dérivée.
4. En déduire la valeur de :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x.$$

Exercice 27. Fonction Arccos

1. Montrer que la fonction $\cos$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On notera $\arccos$ la bijection réciproque.
2. Déterminer $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
3. Montrer que $\arccos$ est dérivable sur $]0, \pi[$ et déterminer sa dérivée.
4. En déduire la valeur de :
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x.$$

Exercice 28.
Soit g une fonction 2 fois dérivable sur $[a, b]$ telle que : $g(a) = g(b) = 0$ et $\forall x \in]a, b[, g''(x) \leq 0$.
Montrer que g est positive sur $]a, b[$.

Exercice 29.
Montrer que le polynôme $X^n + aX + b$ (a et b réels) admet au plus 3 racines réelles.

Exercice 30.
Montrer que le polynôme P_n défini par :
$$P_n(X) = \left((1-t^2)^n\right)^{(n)}$$
est un polynôme de degré n dont les racines réelles sont simples et appartiennent à $[-1, 1]$.