Chapitre 11

Dérivation

Table des matières

1 Dérivabilité en un point **3**
- 1.1 Définition . . . 3
- 1.2 Dérivabilité à gauche et à droite . . . 4
- 1.3 Continuité et dérivabilité . . . 5

2 Dérivabilité sur un intervalle **5**
- 2.1 Définition et dérivabilité des fonctions de référence . . . 5
- 2.2 Opérations sur les fonctions dérivables . . . 5
  - 2.2.1 Opérations algébriques . . . 5
  - 2.2.2 Dérivée d'une composée . . . 6
  - 2.2.3 Dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable . . . 6

3 Théorème de Rolle et accroissements finis **7**
- 3.1 Théorème de Rolle . . . 7
- 3.2 Théorème et Inégalité des accroissements finis . . . 8
- 3.3 Monotonie et signe de la dérivée . . . 9

4 Preuves et solutions **11**

1 Dérivabilité en un point

1.1 Définition

Définition 1. (Dérivabilité en un point)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point et soit $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable en x_0 lorsque le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, défini pour $x \neq x_0$ et appelé **taux d'accroissement de f entre x et x_0**, admet une limite finie quand x tend vers x_0.
Cette limite est alors appelée **nombre dérivé de f en x_0**, noté $f'(x_0)$.
Sous réserve d'existence, on a donc :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

ou, de manière équivalente :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Exercice de cours 1.

- Prouver que la fonction racine carrée est dérivable en tout réel $x_0 > 0$ et retrouver la formule de sa dérivée.
- Prouver que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Remarque.

- Si f est dérivable en x_0, la courbe de f admet une tangente au point $M_0(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'(x_0)$. Cette tangente a alors pour équation :

$$\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).}$$

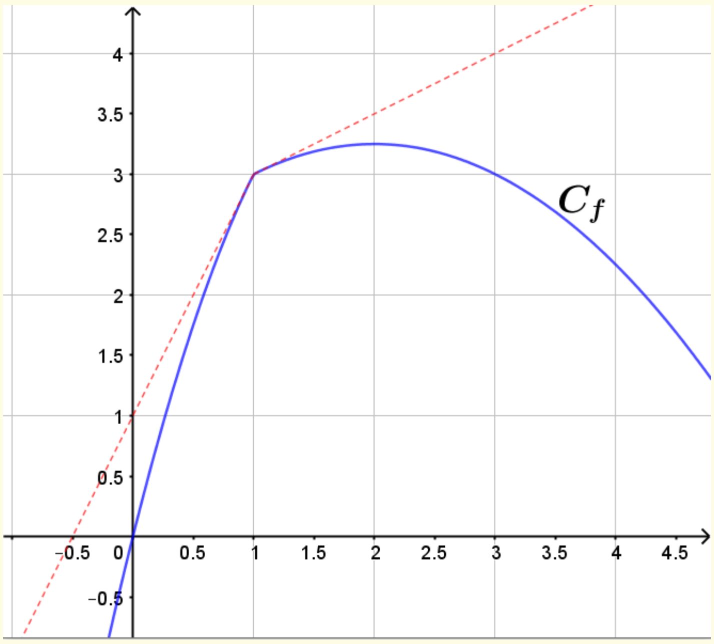
- Si la limite du taux d'accroissement en x_0 est $\pm\infty$, la courbe de f possède alors une tangente verticale au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

1.2 Dérivabilité à gauche et à droite

Définition 2. (Dérivabilité à gauche, à droite)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point et soit $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0 lorsque le rapport $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 par la droite (resp. par la gauche).
Cette limite est alors appelée **nombre dérivé à droite (resp. à gauche) de f en x_0**, noté $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).

Remarque. Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0, la courbe de f admet une demi-tangente au point $M_0(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$). Cette demi-tangente a la même équation que dans le cas dérivable, en remplaçant $f'(x_0)$ par $f'_d(x_0)$ (resp. par $f'_g(x_0)$).

Exemple 1. Déterminer graphiquement $f'_g(1)$ et $f'_d(1)$:



Proposition 1. (Caractérisation de la dérivabilité par la dérivabilité à gauche et à droite) (admis)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point et soit x_0 un point intérieur à I.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } x_0 \\ \textbf{et} \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0). \end{cases}$$

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 2.
$f : x \mapsto |x|$ admet une dérivée à gauche et à droite en 0 : $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$
Donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

1.3 Continuité et dérivabilité

Proposition 2. (Dérivable implique continue) (admis)

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Attention ! La réciproque est fausse. Par exemple, $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

2 Dérivabilité sur un intervalle

2.1 Définition et dérivabilité des fonctions de référence

Définition 3. (Dérivabilité sur un intervalle)
On dit que f est dérivable sur un intervalle I si f possède un nombre dérivé en tout point de I.

Exemple 3.
La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

Proposition 3. (Dérivabilité des fonctions de référence) (admis)
Toutes les fonctions de référence sont dérivables sur leur domaine de définition sauf :

- La fonction racine carré, non dérivable en 0.
- La fonction valeur absolue, non dérivable en 0 (mais dérivable à gauche et à droite en 0).
- La fonction partie entière, non dérivable car non continue en tout x_0 entier.

2.2 Opérations sur les fonctions dérivables

2.2.1 Opérations algébriques

Proposition 4. (Opérations algébriques sur les fonctions dérivables.) (*Voir la preuve*)
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- Pour tout réel λ, λu est dérivable et : $(\lambda u)' = \lambda u'$.
- $u + v$ est dérivable et $(f + g)' = u' + v'$.
- uv est dérivable et $(fg)' = u'v + uv'$.
- si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{v}$ est dérivable et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$
- si v ne s'annule pas sur I alors alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemple 4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.2.2 Dérivée d'une composée

Proposition 5. (Dérivée d'une composée) (*Voir la preuve*)
Soit u dérivable sur I et f dérivable sur $f(I)$. La fonction $f \circ u$ est dérivable sur I et on a :

$$\big(f(u)\big)' = u'f'(u).$$

En particulier, on a :

- $(e^u)' = u'e^u$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.
- $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(\cos u)' = -u' \sin u$.
- $(\sin u)' = u' \cos u$.
- $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$

2.2.3 Dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable

Proposition 6. (Dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable) (preuve faite en cours)
Soit f une fonction continue et strictement monotone (donc bijective) de I sur $J = f(I)$.

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ \text{et} \\ f' \text{ ne s'annulle pas sur } I \end{cases} \textbf{alors} \begin{cases} f^{-1} \text{ est dérivable sur } J \\ \text{et} \\ \forall x \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} \end{cases}$$

Proposition 7. (Dérivée de la fonction arctan) (preuve faite en cours)
La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

3 Théorème de Rolle et accroissements finis

3.1 Théorème de Rolle

Proposition 8. (Lemme 1 : fonction dérivable ayant un maximum en un point intérieur) (*Voir la preuve*)
Soit $a, b \in I$, $a < b$,

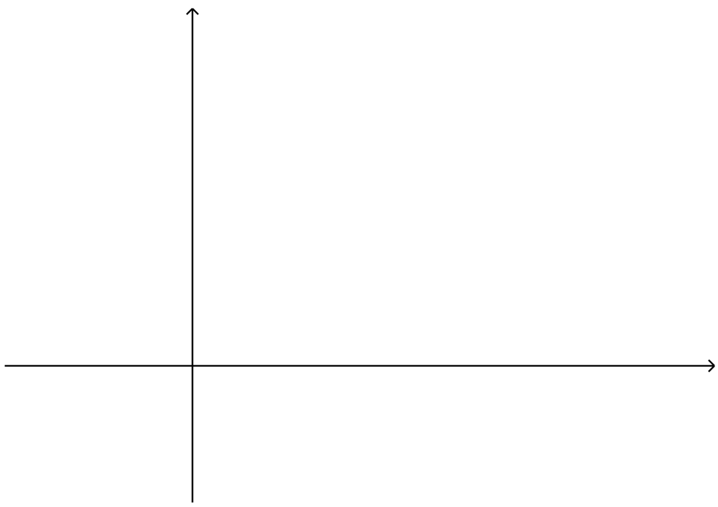
$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ f \text{ atteint un maximum } M \text{ en un réel } \alpha \in]a, b[\end{cases} \quad \textbf{alors } f'(\alpha) = 0$$

Proposition 9. (Lemme 2 : fonction dérivable ayant un minimum en un point intérieur) (*Voir la preuve*)
Soit $a, b \in I$, $a < b$,

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ f \text{ atteint un minimum } m \text{ en un réel } \alpha \in]a, b[\end{cases} \quad \textbf{alors } f'(\alpha) = 0$$

Proposition 10. (Théorème de Rolle) (*Voir la preuve*)
Soit $a, b \in I$, $a < b$,

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{cases} \quad \textbf{alors} \exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$$



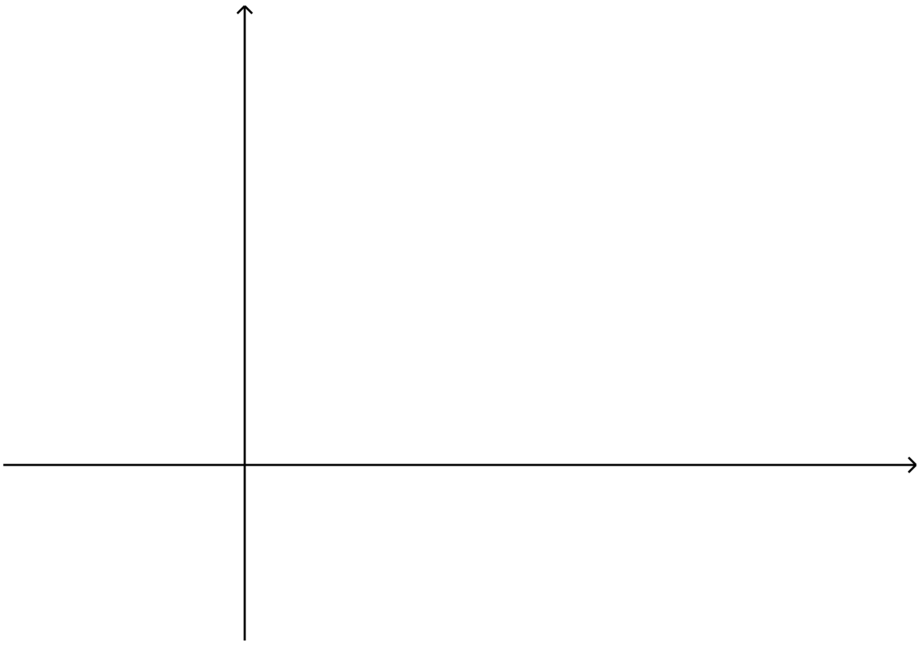
Exercice de cours 2.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $C_0,\ C_1, \ldots, C_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{k+1} = 0$.

Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k x^k = 0$.

3.2 Théorème et Inégalité des accroissements finis

Proposition 11. (Théorème des Accroissements finis) (*Voir la preuve*)
Soit $a, b \in I$, $a < b$,

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\end{cases} \quad \textbf{alors} \exists c \in]a,b[, f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$



Proposition 12. (Inégalité des Accroissements finis - version 1) (admis)
Soit $a, b \in I$, $a < b$,

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ \text{il existe deux réels } m,\ M \text{ tq } \forall x \in]a,b[,\ m \leq f'(x) \leq M \end{cases} \quad \textbf{alors} m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$$

Proposition 13. (Inégalité des Accroissements finis - version 2) (admis)
Soit $a, b \in I$, $a < b$,

$$\textbf{Si} \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ \text{il existe un réel } M \text{ tq } \forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \leq M \end{cases} \quad \textbf{alors } |f(b)-f(a)| \leq M|b-a|$$

Exercice de cours 3. Équivalent de la série harmonique et constante d'Euler
On définit la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1,\ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Cette suite s'appelle "la série harmonique".

1. Démontrer que, pour tout entier $k \geq 1$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$
2. En déduire que pour tout entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.
3. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{H_n}{\ln n}$.
5. On pose $u_n = H_n - \ln n$.
   Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. En déduire qu'elle converge.
   Sa limite est appelée la constante d'Euler et se note γ.
6. On pose $v_n = \ln(n+1) - H_n$.
   Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire que (v_n) converge vers γ.
7. Proposer alors un programme Scilab qui demande la précision souhaitée affiche une valeur approchée de γ avec la précision demandée. On calculera pour cela les suites u_n et v_n jusqu'à ce que $u_n - v_n$ soit inférieur à la précision demandée.

Exercice de cours 4.
Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$

3.3 Monotonie et signe de la dérivée

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer un théorème que nous avons pourtant déjà beaucoup utilisé :

Proposition 14. (Monotonie et signe de la dérivée) (*Voir la preuve*)
Soient I un intervalle (pas forcément fermé) d'extrémités a et b avec $a < b$, et f une fonction continue sur I et dérivable sur $]a, b[$.

1. f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur $]a, b[$
2. f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si f' est positive (resp. négative) sur $]a, b[$
3. f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si

   f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur $]a, b[$ sauf peut-être en des points isolés.

Attention ! Ces résultats sont uniquement valables sur un intervalle ! Une fonction peut-être de dérivée nulle sans être constante pour autant, comme le montre l'exemple suivant :

Exercice de cours 5. Prouver que pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

4 Preuves et solutions

Preuve de la proposition 4

Pour la somme, c'est évident. Pour le produit, on remarque que $f(x)(g(x)-g(x_0))+g(x_0)(f(x)-f(x_0)) = f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)$. On divise par $x-x_0$ et le premier terme tend vers $f(x_0)g'(x_0)$ et le second vers $g(x_0)f'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0.
Pour l'inverse de f, $\left(\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{f(x_0)}\right)\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)=\dfrac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}\times\dfrac{1}{f(x)f(x_0)}$ qui tend bien vers $\dfrac{-f'(x_0)}{f(x_0)^2}$ lorsque x tend vers x_0.
Il suffit de faire le produit de f et $\dfrac{1}{g}$.
(*retour à la proposition 4*)

Preuve de la proposition 5

Soit $x_0\in I$. Montrons que $f\circ u$ est dérivable en x_0 et que $(f\circ u)'(x_0)=u'(x_0)f'\Big(u(x_0)\Big)$.
Nous allons faire la démonstration uniquement dans le cas où il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x\in V,\ u(x)-u(x_0)\neq 0$.
Pour tout $x\in V$ on a alors

$$\frac{f\circ u(x)-f\circ u(x_0)}{x-x_0}=\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}\times\frac{f\Big(u(x)\Big)-f\Big(u(x_0)\Big)}{u(x)-u(x_0)}.$$

Or $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}=u'(x_0)$
et $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f\Big(u(x)\Big)-f\Big(u(x_0)\Big)}{u(x)-u(x_0)}\underset{X=u(x)}{=\!=\!=}\lim_{X\to u(x_0)}\frac{f(X)-f\Big(u(x_0)\Big)}{X-u(x_0)}=f'\Big(u(x_0)\Big)$.
D'où le résultat.
(*retour à la proposition 5*)

Preuve de la proposition 8

Pour tout $x\in]a,b[,\ f(x)-f(\alpha)=f(x)-M\leq 0$.

- Si $x<\alpha$:
  $x-\alpha<0$ et donc $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\geq 0$.
  Donc $\displaystyle\lim_{x\overset{<}{\to}\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\geq 0$.
  Donc $\boxed{f'_g(\alpha)\geq 0.}$
- Si $x>\alpha$:
  $x-\alpha>0$ et donc $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\leq 0$.
  Donc $\displaystyle\lim_{x\overset{>}{\to}\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\leq 0$.
  Donc $\boxed{f'_d(\alpha)\leq 0.}$

Or f est dérivable en α donc $f'_g(\alpha)=f'_d(\alpha)=f'(\alpha)$.
$f'(\alpha)$ est donc à la fois positif et négatif, donc il est nul.

(*retour à la proposition 8*)

Preuve de la proposition 9

On pose $g = -f$.
g est dérivable sur $]a, b[$ et admet un maximum en α donc $g'(\alpha) = 0$ d'après le lemme 1.
Or $g'(\alpha) = -f'(\alpha)$.
Donc $f'(\alpha) = 0$.
(*retour à la proposition 9*)

Preuve de la proposition 10

f est continue sur le segment $[a, b]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes.
Notons m son minimum et M son maximum.

- Si m et M sont tous les deux atteints en a :
  Puisque $f(a) = f(b)$ ils sont donc tous les deux atteints en b et sont égaux.
  Alors : $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M = m$.
  Donc f est constante sur $[a, b]$ et donc sa dérivée est nulle sur $]a, b[$.
- Si m ou M n'est pas atteint en a :
  Puisque $f(a) = f(b)$ il n'est pas atteint en b et donc il est atteint en un réel $c \in]a, b[$.
  D'après les lemmes 1 et 2, on a alors $f'(c) = 0$

(*retour à la proposition 10*)

Preuve de la proposition 11

On pose $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.
g est continue sur $[a, b]$ comme différence de fonctions continues.
g est dérivable sur $]a, b[$ comme différence de fonctions dérivables.
Or $g(a) = f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a)$
et $g(b) = f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$.
Donc $g(a) = g(b)$.
Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Or $\forall x \in]a, b[,\ g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Donc $f'(c) = g'(c) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
(*retour à la proposition 11*)

Preuve de la proposition 14

1. Si f est constante sur I, alors, pour tout couple de réels distincts (x, x_0) de $]a, b[$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$.
   Réciproquement, si f' est nulle sur $]a, b[$ alors pour tout couple (x, y) de réels distincts de I, d'après l'inégalité

des accroissements finis version 2 : $|f(x)-f(y)| \leq 0$ et donc $f(x)=f(y)$. Donc f est bien constante sur I.

2. Si f est croissante sur I alors, pour tout couple de réels distincts (x,x_0) de $]a,b[$, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ et donc $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.
Même raisonnement, mutatis mutandis, pour le cas où f est décroissante sur I.
Réciproquement, si f' est positive sur $]a,b[$, alors, pour tout couple (x,y) de réels de I, tels que $x<y$ d'après l'inégalité des des accroissements finis version 1 : $0\times(y-x) \leq f(y)-f(x)$ et donc $f(x) \leq f(y)$. Donc f est bien croissante sur I.
Même raisonnement, mutatis mutandis, pour le cas où f' est négative sur $]a,b[$.

3. (raisonnement largement hors programme et peu détaillé)
Si f est strictement croissante sur I, elle est croissante sur I et donc f' est positive sur I d'après le point précédent. Or elle ne peut s'annuler sur un sous intervalle de I car sinon elle serait constante sur ce sous-intervalle et donc plus strictement croissante.
Réciproquement, si f' est strictement croissante sur $]a,b[$ sauf entre des points isolés. Sur tout intervalle se situant entre deux de ces points isolés successifs, elle est strictement positive et par le TAF, strictement croissante sur cet intervalle. Au final, elle est strictement croissante sur une succession d'intervalles adjacents, tous de longueur non nulle et donc strictement croissante sur tout I.

(*retour à la proposition 14*)